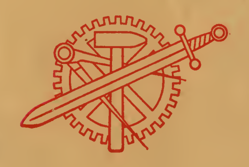
INGENIEUR SCHULE

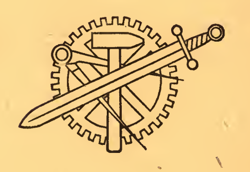


AUFBAULEHRGANG
(EINFÜHRUNG)

3. TEIL

85. SAMMELBAND DER SCHRIFTENREIHE
„SOLDATENBRIEFE ZUR BERUFSFÖRDERUNG“

INGENIEUR-SCHULE



AUFBAULEHRGANG
(EINFÜHRUNG)

3. TEIL

85. SAMMELBAND DER SCHRIFTENREIHE
„SOLDATENBRIEFE ZUR BERUFSFÖRDERUNG"

Im Auftrage des Oberkommandos der Wehrmacht
hergestellt durch den
Verlag Ferdinand Hirt, Breslau / Leipzig

Printed in Germany

Vorwort

Alle Lehrgänge der „Soldatenbriefe zur Berufsförderung“ erscheinen infolge der großen Zustellungsschwierigkeiten nicht mehr als monatliche Doppelbriefe, sondern in Form der bisherigen Sammelbände als Tornisterschriften für alle Berufsgebiete. Hierdurch können besonders die zahlreichen Arbeitsgemeinschaften in der Truppe mit Arbeitsstoff für längere Zeit auf einmal versehen werden.

Die 16 ersten Sammelbände sind bereits Ende 1941 herausgegeben worden (siehe erste Spalte). Im Laufe des Winters 1942/43 erscheinen die in der zweiten Spalte aufgeführten Sammelbände.

Sammelbände:	1941	1942/43
Ausgabe A: Kaufmännische Lehrgänge		
Kaufmännischer Grundlehrgang	1. Teil	2. Teil
Kaufmännischer Aufbaulehrgang	1. Teil	2. Teil
Einzelhandel, Aufbaulehrgang	1. Teil	2. Teil
Außenhandelskaufmann, Aufbaulehrgang	—	1. u. 2. Teil
Bankkaufmann, Aufbaulehrgang	—	1.—3. Teil
Industriekaufmann, Aufbaulehrgang	—	1. Teil
Plakatschrift	—	ein Teil *
Ausgabe B: Lehrgänge für Handwerker und Ingenieure		
Bautechnik, Grundlehrgang	1. Teil	2. u. 3. Teil
Metallbearbeitung, Grundlehrgang	1. Teil	2. u. 3. Teil
Elektrotechnik, Grundlehrgang	1. Teil	2. u. 3. Teil
Kraftfahrtechnik, Grundlehrgang	1. Teil	2. u. 3. Teil
Betriebstechnik, Grundlehrgang	1. Teil	2. u. 3. Teil
Ingenieurschule, Aufbaulehrgang (Einführung)	1. Teil	2. u. 3. Teil
Bauschule, Aufbaulehrgang (Einführung)	1. Teil	2. u. 3. Teil
Hochbau und Tiefbau, Aufbaulehrgang	—	1. u. 2. Teil
Straßenbau, Vermessungswesen und Wasserwirtschaft, Aufbaulehrgang	—	1. u. 2. Teil
Maschinenbau und Elektrotechnik, Aufbaulehrgang	—	1. u. 2. Teil
Weg zur Meisterprüfung	—	1.— 3. Teil
Technische Tabellen	ein Teil *	—
Ausgabe C: Landwirtschaftliche Lehrgänge		
Landwirtschaftlicher Grundlehrgang	1. Teil	2. Teil
Landwirtschaftlicher Aufbaulehrgang	—	1. Teil
Der Kleingarten, Landwirtschaftlicher Sonderlehrgang	—	1. Teil
Kleintierzucht und -haltung, Landwirtschaftlicher Sonderlehrgang	—	ein Teil
Ausgabe D: Allgemeinbildende Lehrgänge		
Allgemeinbildender Grundlehrgang	1. Teil	2. Teil
Allgemeinbildender Aufbaulehrgang	1. Teil	2. Teil
Weg zur Reifeprüfung, Aufbaulehrgang	—	neun Teile
Deutsche Stenografie	—	1. u. 2. Teil*
Allgemeinbildende Sonderlehrgänge		
Der Westen, Der Norden, Der Osten	je 1. Teil	je 2. Teil
Der Südosten, Der Süden	—	je ein Teil
Ausgabe E: Lehrgänge für Beamte und Behördenangestellte		
Grundlehrgang für Beamte	—	1. u. 2. Teil
Ausgabe F: Lehrgänge für akademische und verwandte Berufe		
Der Rechtswahrer	—	1. u. 2. Teil

Die erweiterte 2. Auflage der **Fachbuchliste,** die als 55. Sammelband im Dezember 1942 in der Reihe der Sammelbände herausgekommen ist, benennt besonders geeignete Bücher für die Weiterbildung. Sie liegt in folgenden, auch einzeln zu beziehenden Teilen vor:

Teil 1: Kaufmann
Teil 2: Handwerk und Technik
Teil 3: Landwirtschaft und Gartenbau
Teil 4: Allgemeinbildung
Teil 5: Beamte und Behördenangestellte
Teil 6: Fachschul- und Hochschulberufe

Auf den 56. Sammelband **„Soldat und Beruf — Was kann ich durch die Berufsförderung der Wehrmacht praktisch erreichen?"** wird besonders hingewiesen. Er ist im Oktober 1942 an die Truppe verteilt worden und gibt eine Übersicht über Zweck und Zielsetzung der Berufsförderung der Wehrmacht, der einzelnen Lehrgänge sowie der Arbeitsgemeinschaften. Die Schrift benennt ferner die verschiedenen Möglichkeiten, sich auf Grund der Durcharbeitung der Soldatenbriefe auf eine Prüfung vorzubereiten und sie bei den zuständigen zivilen Stellen unter vereinfachten Bedingungen abzulegen (z. B. Meisterprüfung im Handwerk, Abschlußprüfung einer Höheren Landbauschule, Reifeprüfung, Vorbereitung auf den Besuch der Fachschulen der Wehrmacht, Aufnahmeprüfung für das 2. Semester einer Ingenieur- oder Bauschule).

Die Sammelbände werden auf dem Dienstwege an die Einheiten verteilt (die Ausgabe „Der Rechtswahrer" wird durch die Justizbehörde bzw. die Berufsorganisationen ihren Mitgliedern durch die Post zugestellt). Darüber hinaus benötigte Stücke können — soweit vorrätig — für die Arbeitsgemeinschaften auf dem Dienstwege angefordert werden, und zwar nach dem Stande vom 1. Februar 1943:

für das Feldheer: bei den Außenstellen des Oberkommandos der Wehrmacht für Truppenbetreuung bzw. für die Einheiten in Norwegen, Finnland, Dänemark, in den Niederlanden, im Generalgouvernement und in den Reichskommissariaten Ostland und Ukraine bei der Abt. Ic der zuständigen Kommandostelle (Militärbefehlshaber, Wehrmachtbefehlshaber oder AOK.); für das Afrikakorps beim Deutschen General beim Hauptquartier der italienischen Wehrmacht, Rom;

für das Ersatzheer: bei den zuständigen Stellv. Gen.-Kdos.;

für die Kriegsmarine: beim Kdo. der Marinestation der Nordsee oder beim Kdo. der Marinestation der Ostsee (MVBl. 1942, S. 34, Nr. 30);

für die Luftwaffe: bei den zuständigen Luftgaukommandos.

Für einzelne Wehrmachtangehörige besteht nach wie vor die Möglichkeit, die Sammelbände durch die Frontbuchhandlungen zum Stückpreis von RM. 0,80 oder durch den Verlag Ferdinand Hirt, Leipzig C 1, Salomonstraße 15, gegen Voreinsendung von RM. 1,— je Band einschließlich Porto und Verpackung zu beziehen. Bei Bestellungen durch den Verlag ist bis zu je drei Bänden eine Zulassungsmarke einzusenden oder die Heimatanschrift anzugeben. Die mit * versehenen Bände sind Halbbände und kosten RM. 0,40 bzw. RM. 0,50. Zahlungen haben bei Bestellungen durch den Verlag Ferdinand Hirt ausschließlich auf Postscheckkonto Leipzig 9418 zu erfolgen.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Sammelbände nicht etwa ein Lehrbuch ersetzen sollen; sie erheben keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, sondern sind herausgegeben mit dem Ziel, den bei der Wehrmacht befindlichen Ingenieur oder Techniker über die in seinem Beruf in den letzten Jahren herausgekommenen neuen Verfahren, sei es hinsichtlich der Werkstoffe oder Konstruktionen, auf dem laufenden zu halten.

Über die Aufnahmebedingungen für die Ingenieurschule siehe Einführung 1. Teil.

Inhaltsverzeichnis

Arithmetik und Algebra

Verhältnisse — Proportionen

Man findet in technischen Zeichnungen oder auf Landkarten allgemein die Angabe eines Maßstabes. Zeichnet man z. B. im Maßstab 1 : 10 (sprich 1 zu 10), so entspricht 1 mm in der Zeichnung einer Länge von 10 mm an dem gezeichneten Gegenstand. Mit anderen Worten: die Länge irgendeiner Strecke der Zeichnung ist immer $\frac{1}{10}$ der entsprechenden Strecke am Gegenstand. Somit entsprechen 8 mm in der Zeichnung 80 mm am Gegenstand, denn 8 verhält sich zu 80 wie 1 zu 10. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 100000 ist 1 cm gleich 100000 cm = 1 km in der Natur. Dieses Vergleichen ist also ein Aufsuchen des Größenverhältnisses, und man schreibt dieses Verhältnis in der Regel unter Verwendung des Doppelpunktes (:), der in der Sprache meist nicht durch das Wort „durch", sondern durch das Wort „zu" wiedergegeben wird. Demnach ist das Verhältnis $a:b$ (sprich a zu b) dasselbe wie der Bruch $\frac{a}{b}$.

Man spricht nun von einem geraden (direkten) Verhältnis und von einem umgekehrten (indirekten) Verhältnis. Verhalten sich z. B. die Arbeiterzahlen wie 1 : 5, so stehen auch die Lohnsummen im Verhältnis 1 : 5, d. h.: Arbeiterzahl und Lohnsumme stehen in geradem Verhältnis. Verhalten sich die Arbeiterzahlen wie 1 : 5, so verhalten sich dagegen die für dieselbe Arbeit benötigten Arbeitszeiten wie 5 : 1, d. h.: Arbeiterzahl und Arbeitszeit stehen im umgekehrten Verhältnis.

In dem Verhältnis $a:b$ heißt a Vorderglied, b Hinterglied. Man nennt eine Gleichung, die aussagt, daß zwei Verhältnisse einander gleich sind, Proportion.

In jeder Proportion (Verhältnisgleichung) hat man demnach zwei Vorderglieder und zwei Hinterglieder. Außerdem gibt es in einer Proportion innere und äußere Glieder. In der Proportion

$$a:b=c:d$$

(sprich a zu b wie c zu d)

heißen a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder. Außerdem sind a und d Außenglieder, b und c Innenglieder.

a	:	b	=	c	:	d
Vorderglied		Hinterglied		Vorderglied		Hinterglied

Innenglieder

$$a:b=c:d$$

Außenglieder

Erweitern und Kürzen von Verhältnissen

Die Proportion $a : b = c : d$ läßt sich auch als Bruchgleichung in der Form schreiben:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

In diesem Sinne ist das Verhältnis nichts anderes als eine besondere Art von Bruch (Quotient) und läßt sich daher wie jeder Quotient erweitern und kürzen. Insbesondere lassen sich bei jedem Verhältnis benannter Größen Vorderglied und Hinterglied durch die entsprechende Größeneinheit dividieren, d. h.: jedes Verhältnis läßt sich auf ein reines Zahlenverhältnis zurückführen.

z. B. $28a : 21a = 28 : 21 = 4 : 3$
$81m : 63m = 81 : 63 = 9 : 7$

1. Beispiel: Folgende Verhältnisse sind durch größere Zahlen auszudrücken:

a) $1:3$ b) $3:5$ c) $a:b$ d) $2\text{ cm} : 3\text{ cm}$

Lösungen:

a)	b)	c)	d)
$1:3$	$3:5$	$a:b$	$2\text{ cm} : 3\text{ cm}$
$= 10:30$	$= 9:15$	$= 6a:6b$	$= 8\text{ cm} : 12\text{ cm}$
oder $= 8:24$	$= 27:45$	$= a^2:ab$	$= 14\text{ cm} : 21\text{ cm}$
oder $= 17:51$	$= 33:55$		$= 24\text{ cm} : 36\text{ cm}$

2. Beispiel: Folgende Verhältnisse sind durch Verhältnisse ganzer Zahlen auszudrücken:

a) $1:0{,}6$ b) $0{,}09:3$ c) $\frac{3}{5}:\frac{7}{10}$ d) $2\frac{1}{3}:1\frac{5}{6}$

Lösungen:

a)	b)	c)	d)
$1:0{,}6$	$0{,}09:3$	$\frac{3}{5}:\frac{7}{10}$	$2\frac{1}{3}:1\frac{5}{6}$
$= 10:6$	$= 9:300$	$= \frac{6}{10}:\frac{7}{10}$	$= \frac{7}{3}:\frac{11}{6}$
oder $= 5:3$	$= 3:100$	$= 6:7$	$= \frac{14}{6}:\frac{11}{6}$
			$= 14:11$

3. Beispiel: Folgende Verhältnisse sind durch möglichst kleine Zahlen auszudrücken.

a) $9:6$ b) $100a:175a$ c) $x^2y^3:x^3y^2$ d) $35a^2bc:49a^2b^2$

Lösungen:

a) $9:6$ $= \underline{\underline{3:2}}$ b) $100a:175a$ $= \underline{\underline{4:7}}$ c) $x^2y^3:x^3y^2$ $= \underline{\underline{y:x}}$ d) $35a^2bc:49a^2b^2$ $= \underline{\underline{5c:7b}}$

Zuweilen ist ein Erweitern und Kürzen erforderlich, um ein Verhältnis mit Brüchen in ein solches mit möglichst kleinen Zahlen zu verwandeln.

4. Beispiel:

a) $2{,}14:4{,}6$ b) $\left(1+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+1\right)$ c) $\frac{15m}{8ac}:\frac{21n}{16bc}$

Lösungen:

a) $2{,}14 : 4{,}6$
$= 214 : 460$
$= \mathbf{107 : 230}$

b) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(\frac{b}{a} + 1\right)$
$= \frac{b + a}{b} : \frac{b + a}{a}$
$= a(b + a) : b(b + a)$
$= a : b$

c) $\frac{15m}{8ac} : \frac{21n}{16bc}$
$= \frac{3 \cdot 5m}{8ac} : \frac{3 \cdot 7n}{16bc} = \frac{5m}{8ac} : \frac{7n}{16bc}$
$= \frac{2b \cdot 5m}{16abc} : \frac{7an}{16abc}$
$= \mathbf{10bm : 7an}$

Proportion und Produktengleichung

Aus der Form $a : b = c : d$, die man auch schreiben kann $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ergibt sich die Produktengleichung $a d = b c$.

Für die Bildung der Produktengleichung gilt die Regel: In jeder Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Die Probe auf die Richtigkeit einer Proportion macht man am einfachsten durch die Bildung der Produktengleichung. Ist z. B. die Proportion

$$2\tfrac{1}{2} : 3 = 7\tfrac{1}{2} : 9$$

richtig? Durch Bildung der Produktengleichung erhalten wir:

$$2\tfrac{1}{2} \cdot 9 = 7\tfrac{1}{2} \cdot 3$$
$$22\tfrac{1}{2} = 22\tfrac{1}{2}$$

Ergibt die Produktengleichung wie im vorliegenden Falle eine identische Gleichung, so ist die Proportion richtig.

5. Beispiel: a) $25 : 4 = 75 : 12$
oder $25 \cdot 12 = 4 \cdot 75$
$\mathbf{300 = 300}$

b) $1\tfrac{1}{2} : 5 = 7\tfrac{1}{2} : 25$
oder $1\tfrac{1}{2} \cdot 25 = 5 \cdot 7\tfrac{1}{2}$
$37\tfrac{1}{2} = 37\tfrac{1}{2}$

Veränderung eines Verhältnisses durch Multiplikation oder Division

Die beiden Vorder- oder die beiden Hinterglieder eines Verhältnisses dürfen mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert werden. Aus der Proportion:

$$a : b = c : d$$

ergeben sich dann nachstehende Veränderungen:

1) $3a : b = 3c : d$
$a : 3b = c : 3d$

2) $\frac{a}{4} : b = \frac{c}{4} : d$

$$a : \frac{b}{4} = c : \frac{d}{4}$$

Da die Produktengleichungen in allen Fällen gleich sind, so sind die neugebildeten Proportionen richtig.

Sind in einer Proportion drei Glieder bekannt und wird das vierte (x) gesucht, so nennt man dieses Glied **vierte Proportionale** der drei gegebenen Glieder.

6. Beispiel:

$$a : b = c : x \qquad\qquad 3 : x = 4 : 6$$
$$ax = bc \qquad\qquad 4x = 18$$
$$x = \frac{bc}{a} \qquad\qquad x = 4\tfrac{1}{2}$$

Eine Proportion, deren innere Glieder einander gleich sind, wird **stetige Proportion** genannt. Eine solche hat die Form:

$$a : b = b : c$$

Die Größe b heißt dann die **mittlere Proportionale** zwischen a und c.

In jeder Proportion ist:

ein Außenglied gleich dem Produkt der Innenglieder, dividiert durch das andere Außenglied,

ein Innenglied gleich dem Produkt der Außenglieder, dividiert durch das andere Innenglied.

7. Beispiel: $a : b = c : d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a = \frac{b \cdot c}{d} \text{ und } d = \frac{b \cdot c}{a} \text{ ebenso ist } b = \frac{a \cdot d}{c} \text{ und } c = \frac{a \cdot d}{b}$$

Es ergeben sich folgende Regeln:

In einer Proportion darf man vertauschen:

1) die beiden Innenglieder,
2) die beiden Außenglieder,
3) sowohl die beiden Innenglieder als auch die beiden Außenglieder,
4) die beiden Seiten.

8. Beispiel:

$2 : 4 = 3 : 6$
oder $2 : 3 = 4 : 6$
„ $6 : 3 = 4 : 2$
„ $6 : 4 = 3 : 2$
„ $3 : 2 = 6 : 4$
„ $3 : 6 = 2 : 4$
„ $4 : 2 = 6 : 3$
„ $4 : 6 = 2 : 3$

Die Probe ergibt immer das Produkt:

$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

Potenzen

Erklärung der Potenz

Unter einer Potenz versteht man das Produkt gleicher Faktoren. a^5 (sprich a hoch 5) bedeutet also $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. In ihr heißt a die Basis (Grundzahl), die hochgeschriebene Zahl 5 der Exponent (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis a als Faktor gesetzt werden muß. Es ist z. B.:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$\text{oder } a^7 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Während man das Ausrechnen eines Produktes „Multiplizieren" nennt, nennt man das Ausrechnen einer Potenz „Potenzieren". Man potenziert 4 mit 5, indem man 4 fünfmal als Faktor setzt. Die zweite Potenz bezeichnet man auch als Quadratzahl und die dritte Potenz als Kubikzahl.

In einer Summe $a + b$ oder einem Produkt $a \cdot b$ kann man die Summanden bzw. die Faktoren vertauschen. In einer Potenz darf man Basis und Exponent nicht vertauschen. Es ist z. B.:

$$2^3 = 8 \quad \text{aber} \quad 3^2 = 9$$

$$3^4 = 81 \quad \text{aber} \quad 4^3 = 64$$

Potenzieren relativer Zahlen

Werden relative Zahlen potenziert, so setzt man sie in Klammern.

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$$

Aus den beiden Beispielen erkennt man, daß die gerade Potenz von (-2) positiv und die ungerade Potenz negativ ist. Was für die Zahl 2 gilt, gilt auch für jede andere Zahl. Daraus ergibt sich folgende Regel:

Jede gerade Potenz einer negativen Zahl ist positiv.

Jede ungerade Potenz einer negativen Zahl ist negativ.

Die Potenzen von positiven Zahlen sind immer positiv.

Hat man nun eine Aufgabe, in der die Exponenten allgemeine Zahlen sind, etwa von der Form: $(-v)^n \cdot (-v)^{n-1}$

so kann n gerade oder ungerade sein. Ist n eine gerade Zahl, so ist $n-1$ ungerade. Die Zahlen $2n$, $4n$, $6n$ usw. sind immer gerade, während die Zahlen $2n-1$, $4n-1$, $6n-1$ usw. immer ungerade sein müssen.

Es ergibt sich demnach folgende Lösung:

$$(-v)^n \cdot (-v)^{n-1} = (-v)^{n+n-1} = (-v)^{2n-1} = -v^{2n-1} \qquad \text{(vgl. S. 12)}$$

9. Beispiel:

a) $(-b)^{2p-n} \cdot (-b)^{1+n} = (-b)^{2p+1} = \underline{\underline{-b^{2p+1}}}$; der Exponent $2p+1$ ist immer ungerade.

b) $(-a)^{4n-1} \cdot (-a)^{2n-1} = (-a)^{6n-2} = \underline{\underline{a^{6n-2}}}$; der Exponent $6n-2$ ist immer gerade.

Addition und Subtraktion von Potenzen

Man kann nur gleichartige Potenzen addieren oder subtrahieren, ungleichartige dagegen nicht. Gleichartige Potenzen sind solche mit gleicher Basis und gleichem Exponenten.

10. Beispiel:

a) $a^3 + b^4 + 5a^2 + 2b^2 = a^3 + b^4 + 5a^2 + 2b^2$

b) $b^3 - 2c^3 + 8b^3 - 7c^3 = 9b^3 - 9c^3$

c) $27x^3 - 25a^4 + 9b^{12} - a^4 - 9b^{12} + 3a^4 + 13x^3 + 2x^4 = \underline{\underline{40x^3 - 23a^4 + 2x^4}}$

Um Rechenfehler zu vermeiden, hakt man die Glieder, mit denen man schon gerechnet hat, zweckmäßig an.

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Es sind zwei Potenzen a^5 und a^3 miteinander zu multiplizieren.

$$a^5 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^5} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} = a^8$$

Daraus folgt die Regel: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.

11. Beispiel: a) $a^5 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot a^6 = a^{5+3+2+6} = a^{16}$

b) $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$

c) $a^n \cdot a^{2-3n} \cdot a^{4n-3} = a^{n+2-3n+4n-3} = \underline{\underline{a^{2n-1}}}$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

Bei der Division von Potenzen gilt die Regel; Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.

Also:

$$\frac{a^8}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^{8-5} = a^3$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

Für den Fall, daß die größere Hochzahl im Nenner steht, bleibt nur im Nenner eine Potenz zurück.

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2} \text{ oder } \frac{1}{a^{5-3}}$$

Man kann auch rechnen:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$$

Es ist also: $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$, also eine Potenz mit negativem Exponenten.

Daraus ergibt sich die Regel:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Jede Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reziproken Wert der Potenz mit positivem Exponenten.

12. Beispiel:

a) $\frac{x^5}{x^{2-a}} = x^{5-2+a} = \underline{\underline{x^{3+a}}}$

b) $\frac{b^{n-1}}{b^{n+1}} = b^{n-1-n-1} = b^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{b^2}}}$

c) $\frac{1}{7c^{-n}} = \underline{\underline{\frac{c^n}{7}}}$

d) $\frac{b^n b^{12} b^7}{b^{3+n} \cdot b^{17}} = \frac{b^{n+19}}{b^{n+20}} = b^{n+19-n-20} = b^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{b}}}$

e) $\frac{17\,a^8 x^7}{12\,b y^{11}} \cdot \frac{15\,b^5 y^{12}}{34\,a^3 x^{10}} = \frac{17 \cdot \overset{5}{15} \cdot a^8 b^5 x^7 y^{12}}{\underset{4}{12} \cdot \underset{2}{34} \cdot a^3 b x^{10} y^{11}} = \underline{\underline{\frac{5\,a^5 b^4 y}{8\,x^3}}}$

f) $\frac{3\,n v^4}{8\,z^5} \cdot \frac{2\,v z^5}{9\,n^6} = \frac{6\,n v^5 z^5}{72\,n^6 z^5} = \underline{\underline{\frac{v^5}{12\,n^5}}}$

Potenzen mit dem Exponenten 0

Man denkt sich die Zahl 0 als Differenz zweier gleicher Größen entstanden; also: $a^{n-n} = a^0$. Es ist aber: $a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist gleich 1.

Potenzieren von Produkten und Quotienten

Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert.

$$(ab)^n = a^n b^n$$

13. Beispiel: $(3\,axy)^3 = 3^3 a^3 x^3 y^3 = \underline{\underline{27\,a^3 x^3 y^3}}$

Ein Quotient (Bruch) wird potenziert, indem man Zähler und Nenner einzeln potenziert.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

14. Beispiel: $\frac{(2\,xy)^3}{(3\,nv)^4} = \frac{2^3 x^3 y^3}{3^4 n^4 v^4} = \underline{\underline{\frac{8\,x^3 y^3}{81\,n^4 v^4}}}$

Potenzieren einer Potenz

Wenn wir eine Potenz nochmals potenzieren, so lösen wir eine Aufgabe von folgender Form:

$$(a^3)^4 = (a \cdot a \cdot a)^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$$

$$(c^2)^3 = \underbrace{c \cdot c}_{c^2} \cdot \underbrace{c \cdot c}_{c^2} \cdot \underbrace{c \cdot c}_{c^2} = c^2 \cdot c^2 \cdot c^2 = c^{2 \cdot 3} = c^6$$

Hiernach gilt als Regel:

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

15. Beispiel:

a) $(a^6)^5 = a^{30}$ b) $(b^4)^n = b^{4n}$

c) $(c^5)^{x-5} = c^{5x-25}$ d) $(c^5)^{n-4} = c^{5n-20}$

e) $\left(\frac{a^5}{b^7}\right)^4 = \frac{a^{20}}{b^{28}}$ f) $\left(\frac{1}{n^{3n}}\right)^5 = \frac{1^5}{n^{3n \cdot 5}} = \frac{1}{n^{15n}}$

g) $(k^2 l^n m^{2n-3})^{12} = k^{24} l^{12n} m^{24n-36}$

Zusammenfassung

1) Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis.

$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ Beispiel: $a^3 \cdot a^4 = a^7$

2) Division von Potenzen mit gleicher Grundzahl.

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ (für $n > p$) Beispiel: $\frac{a^5}{a^3} = a^2$

$\frac{a^n}{a^p} = \frac{1}{a^{p-n}}$ (für $n < p$) Beispiel: $\frac{a^7}{a^{12}} = \frac{1}{a^5}$

3) Potenzieren eines Produktes.

$(ab)^n = a^n b^n$ Beispiel: $(ab)^4 = a^4 b^4$

4) Potenzieren eines Bruches (Quotienten).

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Beispiel: $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{b^5}$

5) Potenzieren einer Potenz.

$(a^n)^p = a^{np}$ Beispiel: $(a^3)^4 = a^{12}$

6) Potenzieren mit dem Exponenten 0.

$a^0 = 1$ Beispiel: $\left(-\frac{4}{5}\right)^0 = 1$

7) Potenzen mit negativem Exponenten.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Beispiel: $a^{-7} = \frac{1}{a^7}$; $\frac{1}{a^{-5}} = a^5$

Übungsaufgaben

1) Folgende Verhältnisse sind in Verhältnisse ganzer Zahlen umzuwandeln.

a) $1 : 0{,}02$ $3 : 0{,}5$ $2{,}5 : 0{,}3$ $1{,}08 : 0{,}04$

b) $a : \frac{b}{c}$ $\frac{1}{m} : \frac{1}{k}$ $\frac{3a}{5b} : \frac{2c}{3d}$ $\frac{4}{5} : 06$

2) Zu folgenden Proportionen sind die Produktengleichungen zu bilden.

a) $k : l = m : n$ $b : a = c : d$ $3 : 7 = 18 : 42$

b) $a^2 : ab = \frac{1}{a} : \frac{b}{a^2}$ $(a^2 + 2ab + b^2) : (a^2 - b^2) = (a + b) : (a - b)$

3) Berechne die vierte Proportionale x!

a) $u : v = w : x$ $\qquad$ $x : 4 = 2 : 1$

b) $5a : b = x : 1$ $\qquad$ $7a : x = 1 : 2$

4) Welche 7 anderen Proportionen lassen sich aus $3 : 4 = 9 : 12$ bilden?

5) Folgende Potenzen sind auszurechnen.

a) $2^5 \quad 5^2 \quad 3^6 \quad 6^3 \quad 4^3 \quad 3^4 \quad 5^1 \quad 1^5$

b) $(-1)^7 \quad (-2)^4 \quad (-4)^3 \quad (-c)^5$

6) Rechne folgende Quotienten aus!

a) $\frac{5u^3v}{4w^4} \cdot \frac{6v^2w}{25u^6}$ $\qquad$ b) $\frac{14r^{12}s^9}{15t^2} \cdot \frac{45t^5}{28r^9s^6}$

Wurzeln

Erklärung der Wurzel

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir das Rechnen mit Potenzen kennengelernt. Eine Potenz ist ein Produkt aus gleichen Faktoren etwa von der Form $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Wir wissen weiterhin, daß die Basis 2 und der Exponent 4 nicht vertauschbar sind. Wird uns nun die Aufgabe gestellt, aus der Gleichung $a^3 = 125$ die Grundzahl a auszurechnen, so suchen wir die Zahl, die dreimal als Faktor genommen 125 ergibt. Wir rechnen also gewissermaßen rückwärts. Diese Umkehrung des Potenzierens nennt man Wurzelziehen oder Radizieren und schreibt:

$$\sqrt[3]{125} = a = 5$$

In Worten ausgedrückt heißt das: Dritte Wurzel aus 125 gleich 5. Das Rechnungszeichen $\sqrt{\ }$ nennt man das Wurzelzeichen. Es ist entstanden aus dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes radix, zu deutsch Wurzel. Die Zahl 125 ist der Radikand, die Zahl 3 der Wurzelexponent und $\sqrt[3]{125} = 5$ die Wurzel. Die gesuchte Basis heißt hier also „Wurzel".

Nach der Erklärung der Wurzel muß die $n$te Wurzel aus a^n durch Potenzieren mit n wiederum den Wert a ergeben. Da das für die Größe a zutrifft, kann man also die Gleichung aufstellen:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$$

Potenzieren und Radizieren sind wie Addieren und Subtrahieren oder Multiplizieren und Dividieren zwei entgegengesetzte Rechenoperationen, sie heben sich gegenseitig auf.

16. Beispiel: a) $\sqrt[4]{81} = \underline{\underline{3}}$ (sprich: vierte Wurzel aus 81 = 3)

b) $\sqrt[5]{32} = \underline{\underline{2}}$, denn $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

c) $\sqrt[3]{64} = \underline{\underline{4}}$, denn $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$, denn $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

Die zweiten Wurzeln heißen Quadratwurzeln oder kurz Wurzeln. Den Wurzelexponenten 2 läßt man gewöhnlich fort: $\sqrt[2]{100} = \sqrt{100}$. Beim Schreiben des Wurzelzeichens ist immer darauf zu achten, daß der waagerechte Strich des Wurzelzeichens ganz über den Radikanden hinwegreicht, also $\sqrt{1600}$ und nicht $\sqrt{16}00$.

Jede Potenz von + 1 ist gleich 1. Wir können demnach sagen: $1^n = 1$. Daraus folgt, daß umgekehrt jede Wurzel aus + 1 wieder gleich 1 sein muß.

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = 1, \text{ denn } 1^n = 1}$$

Ebenso ist jede Potenz von 0 gleich 0. Deshalb ist auch

$$\boxed{\sqrt[n]{0} = 0, \text{ denn } 0^n = 0}$$

17. Beispiel: a) $\sqrt[10]{1} = \underline{\underline{1}}$ b) $\sqrt[2n]{1} = \underline{\underline{1}}$ c) $\sqrt[n-1]{1} = \underline{\underline{1}}$

d) $\sqrt[12]{0} = \underline{\underline{0}}$ e) $\sqrt[4n]{0} = \underline{\underline{0}}$

Irrationale und imaginäre Zahlen

Wir haben bisher Wurzeln aus Zahlen gezogen, die eine Potenz einer ganzen Zahl waren und deshalb wieder ganze Zahlen ergaben. Wir können aber aus jeder beliebigen Zahl die Wurzel ziehen, z. B. $\sqrt{5}$, $\sqrt{0{,}9}$ oder $\sqrt{2}$. Da $\sqrt{1} = 1$ und $\sqrt{4} = 2$ ist, so muß der Wert von $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen. $\sqrt{2}$ ist also keine ganze Zahl. $\sqrt{2}$ kann aber auch kein gewöhnlicher Bruch sein, denn das Quadrat eines Bruches ergibt wieder einen Bruch, niemals aber eine ganze Zahl. Durch Probieren findet man, daß $\sqrt{2}$ zwischen 1,4 und 1,5 liegen muß, denn $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$. Weiter stellen wir fest, daß $\sqrt{2}$ zwischen 1,41 und 1,42 liegt, da $1{,}41^2 = 1{,}9881$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164$ ist. So kommen wir dem wahren Wert von $\sqrt{2}$ schrittweise näher, ohne ihn jedoch jemals zu erreichen. Er ist ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

So sind alle Wurzelresultate, die nicht ganze Zahlen oder Brüche sind, unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche. Man nennt sie i r r a t i o n a l e

Zahlen. Demgegenüber sind rationale Zahlen solche Zahlen, die sich durch eine ganze Zahl oder einen echten Bruch ausdrücken lassen.

Die Bezeichnung „rational" = genau berechenbar, und „irrational" = nicht genau berechenbar, stammt von ratio (latein.) = Vernunft. Demnach sind $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[5]{9}$; $\sqrt{30}$ irrational, während $\sqrt[2]{9}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt{\frac{1}{81}}$ rational sind $\left(\sqrt[2]{9} \text{ oder } \sqrt[2]{3^2} = 3; \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2; \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2; \sqrt{\frac{1}{81}} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{1}{9}\right)$.

Beim algebraischen Rechnen, z. B. bei quadratischen Gleichungen, ergeben sich sehr oft irrationale Zahlen. Diese werden annäherungsweise angegeben, durch Ablesung am Rechenschieber, durch Ablesung aus Zahlentafeln oder durch logarithmische Berechnung. Der Ingenieur arbeitet gewöhnlich mit dem Rechenschieber, dessen Genauigkeit praktisch meistens ausreicht.

Eine Wurzel mit einem geraden Wurzelexponenten hat zwei Werte, einen positiven und einen negativen. So kann $\sqrt{a^2}$ sowohl den Wert $+a$, als auch den Wert $-a$ haben; denn sowohl $(+a)^2$ als auch $(-a)^2$ ergeben a^2. Ebenso kann $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ gleich $(a-b)$ oder gleich $(b-a)$ gesetzt werden, d. h. $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm(a-b)$, $\sqrt{9} = \pm 3$.

Eine Wurzel mit einem ungeraden Wurzelexponenten aus einer positiven Zahl muß selbst positiv, die Wurzel aus einer negativen Zahl muß selbst negativ sein.

So ist $\sqrt[3]{+8} = +2$, weil $(+2)^3 = +8$ ist, $\sqrt[3]{-8} = -2$, weil $(-2)^3 = -8$ ist. Aber $\sqrt[3]{+8}$ kann nicht den Wert -2, $\sqrt[3]{-8}$ nicht den Wert $+2$ haben.

18. Beispiel: a) $\sqrt{121} = \underline{\underline{\pm 11}}$ b) $\sqrt[4]{625} = \underline{\underline{\pm 5}}$ c) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \underline{\underline{\pm a}}$

d) $\sqrt[3]{125} = \underline{\underline{+5}}$ e) $\sqrt[7]{a^7} = \underline{\underline{+a}}$ f) $\sqrt[3]{64} = \underline{\underline{+4}}$

g) $\sqrt[3]{-1} = \underline{\underline{-1}}$ h) $\sqrt[5]{-32} = \underline{\underline{-2}}$ i) $\sqrt[5]{-243} = \underline{\underline{-3}}$

Nun kann sich bei einer quadratischen Gleichung eine Wurzel wie $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-25}$ usw. ergeben. Wir können aber keine positive oder negative Zahl angeben, deren Quadrat negativ ist. Wir helfen uns hierbei folgendermaßen:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$$

Den Faktor $\sqrt{-1}$ bezeichnet man mit i und nennt ihn imaginäre Einheit. Alle geraden Wurzeln aus negativen Zahlen bezeichnet man daher als imaginäre Zahlen, d. h. eingebildete oder nicht wirkliche Zahlen. Im Gegensatz dazu heißen alle übrigen Wurzeln (rationale, wie irrationale) reelle Zahlen, d. h. wirkliche Zahlen.

Die Wurzel als Bruchpotenz

Aus der Erklärung der Wurzel läßt sich ferner leicht folgern, daß

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4; \quad \sqrt[n]{a^{nx}} = a^x; \quad \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

sein muß. Aus einer Potenz zieht man demnach die Wurzel, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

19. Beispiel: a) $\sqrt[3]{a^2} = \underline{\underline{a^{\frac{2}{3}}}}$ b) $\sqrt{b} = \underline{\underline{b^{\frac{1}{2}}}}$ c) $y^{\frac{3}{7}} = \underline{\underline{\sqrt[7]{y^3}}}$

d) $a^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{5}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[5]{a}}}}$

e) $\sqrt[5n]{b^{-n}} = b^{-\frac{n}{5n}} = b^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{5}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[5]{b}}}}$

Addition und Subtraktion von Wurzeln

Nur gleichartige Wurzeln lassen sich durch Addition und Subtraktion vereinigen. Gleichartige Wurzeln sind solche mit gleichen Radikanden und gleichem Wurzelexponenten.

20. Beispiel: a) $2 + \sqrt[5]{2} + 7 + \sqrt[5]{2} + 7\sqrt[5]{2} = 9 + 9\sqrt[5]{2} = \underline{\underline{9(1 + \sqrt[5]{2})}}$

b) $\sqrt{3} - 2\sqrt{4} + 2 + \sqrt{4} + 5\sqrt{3} = \underline{\underline{6\sqrt{3} - \sqrt{4} + 2}}$

c) $\sqrt{a} + 5\sqrt{a} + \sqrt{2b} - 6\sqrt{a} - \sqrt{b} = \underline{\underline{\sqrt{2b} - \sqrt{b}}}$

d) $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 5\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 2\sqrt[n]{b} = \underline{\underline{-4\sqrt[n]{a}}}$

Ungleichartige Wurzeln kann man also durch Addition oder Subtraktion nicht zusammenfassen. In manchen Fällen ist es jedoch möglich, auch ungleichartige Wurzeln zu vereinigen. Die Wurzeln müssen hierbei gleiche Wurzelexponenten haben, und jede Wurzel muß sich teilweise radizieren lassen, so daß der zurückbleibende Faktor in allen Radikanden gleich ist.

21. Beispiel: a) $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{75} = \sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3}$
$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \underline{\underline{-2\sqrt{3}}}$

b) $\sqrt{ax^2} + 3\sqrt{16\,ax^2} - 2\sqrt{9\,ax^2}$
$= x\sqrt{a} + 3 \cdot 4x\sqrt{a} - 2 \cdot 3x\sqrt{a}$
$= x\sqrt{a} + 12x\sqrt{a} - 6x\sqrt{a} = \underline{\underline{7x\sqrt{a}}}$

c) $\sqrt{72a} - 2\sqrt{32a} + \sqrt{147a} - \sqrt{192a} + \sqrt{18a}$
$= \sqrt{36 \cdot 2a} - 2\sqrt{16 \cdot 2a} + \sqrt{49 \cdot 3a} - \sqrt{64 \cdot 3a} + \sqrt{9 \cdot 2a}$
$= 6\sqrt{2a} - 8\sqrt{2a} + 7\sqrt{3a} - 8\sqrt{3a} + 3\sqrt{2a}$
$= \underline{\underline{\sqrt{2a} - \sqrt{3a}}}$

Wie wir Quadratwurzeln addieren, so können wir auch dritte Wurzeln (Kubikwurzeln) mit verschiedenen Radikanden addieren. Auch hier müssen wir durch teilweises Radizieren gleiche Radikanden herstellen.

22. Beispiel: a) $\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{16}$

$= \sqrt[3]{125 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{64 \cdot 2} + \sqrt[3]{8 \cdot 2}$

$= 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = \underline{\underline{6\sqrt[3]{2}}}$

b) $\sqrt[3]{1715} + 4\sqrt[3]{-40} + \sqrt[3]{1080} + \sqrt[3]{-625}$

$= \sqrt[3]{343 \cdot 5} + 4\sqrt[3]{-8 \cdot 5} + \sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 5} + \sqrt[3]{-125 \cdot 5}$

$= 7\sqrt[3]{5} - 8\sqrt[3]{5} + 6\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} = \underline{\underline{0}}$

Multiplikation von Wurzeln

Für die Multiplikation von Wurzeln gilt folgende Regel: **Gleichnamige Wurzeln (Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten) werden multipliziert, indem man die Radikanden multipliziert.** Es ist also:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$$

23. Beispiel: a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$

b) $\sqrt{(a-b)} \cdot \sqrt{(a+b)} = \underline{\underline{\sqrt{a^2 - b^2}}}$

c) $\sqrt{28\,x} \cdot \sqrt{21\,x} = \sqrt{4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3\,x^2} = \underline{\underline{14\,x\sqrt{3}}}$

d) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{125} = \underline{\underline{5}}$

e) $\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \underline{\underline{\pm \frac{3}{4}}}$

Multipliziert man gleichartige Wurzeln miteinander, d. h. potenziert man eine Wurzel, so stellt man fest, daß die beiden Rechenoperationen, Potenzieren und Radizieren, sich gegenseitig aufheben, z. B.

24. Beispiel: a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{3^2} = \underline{\underline{\pm 3}}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \underline{\underline{a}}$

c) $\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = \underline{\underline{b\sqrt{b}}}$

Multipliziert man eine algebraische Summe oder Differenz von Wurzeln mit einem Faktor, so multipliziert man gliedweise mit diesem Faktor.

25. Beispiel: a)[1] $(\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{12})\sqrt{3}$
$= \sqrt{9}+\sqrt{36}-\sqrt{225}+\sqrt{36}$
$= 3+6-15+6 = \underline{\underline{0}}$

b) $(\sqrt{a}-1)\sqrt{a} = \sqrt{a^2}-\sqrt{a} = \underline{\underline{a-\sqrt{a}}}$

Zwei algebraische Summen von Wurzelausdrücken werden multipliziert, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert. Das gleiche gilt für Differenzen.

26. Beispiel: a) $(x-\sqrt{xy})(y+\sqrt{xy})$
$= xy + x\sqrt{xy} - y\sqrt{xy} - (\sqrt{xy})^2$
$= xy + x\sqrt{xy} - y\sqrt{xy} - xy$
$= \underline{\underline{(x-y)\sqrt{xy}}}$

b) $(3\sqrt{11}+2\sqrt{5})(3\sqrt{11}-2\sqrt{5}) = 3^2(\sqrt{11})^2 - 2^2(\sqrt{5})^2$
$= 9\cdot 11 - 4\cdot 5 = \underline{\underline{79}}$

Ungleichnamige Wurzeln, d. h. Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten, werden vor dem Multiplizieren zuerst durch Erweitern gleichnamig gemacht nach der Formel

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nx]{a^{px}}$$

27. Beispiel: a) $\sqrt[2]{a}\cdot\sqrt[4]{a} = \sqrt[2\cdot 2]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a} = \underline{\underline{\sqrt[4]{a^3}}}$

b) $\sqrt[15]{x}\cdot\sqrt[20]{x^3} = \sqrt[60]{x^4}\cdot\sqrt[60]{x^9} = \underline{\underline{\sqrt[60]{x^{13}}}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{\frac{4\cdot 27}{9}} = \underline{\underline{\sqrt[6]{12}}}$

Man kann die Formel $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ auch umgekehrt anwenden. Soll aus einem Produkt eine Wurzel gezogen werden, so kann man das Produkt in radizierbare Faktoren zerlegen und aus ihnen die Wurzel ziehen.
$$\sqrt{84\cdot 21} = \sqrt{4\cdot 21\cdot 21} = \sqrt{2^2\cdot 21^2} = 2\cdot 21 = \underline{\underline{42}}$$

Sollen wir aus einem Produkt die dritte Wurzel ziehen, so müssen wir versuchen, das Produkt in Faktoren zu zerlegen, die dritte Potenzen sind.

28. Beispiel: a) $\sqrt{625} = \sqrt{125\cdot 5} = \sqrt{25\cdot 5\cdot 5} = 5\cdot 5 = \underline{\underline{25}}$

b) $\sqrt{18\cdot 98} = \sqrt{18\cdot 2\cdot 49} = \sqrt{36\cdot 49} = 6\cdot 7 = \underline{\underline{42}}$

c) $\sqrt{50x\cdot 72x} = \sqrt{25\cdot 2x\cdot 2\cdot 36x} = \sqrt{25\cdot 4\cdot 36\cdot x^2}$
$= 5\cdot 2\cdot 6x = \underline{\underline{60x}}$

d) $\sqrt[3]{75\cdot 45} = \sqrt[3]{25\cdot 3\cdot 9\cdot 5} = \sqrt[3]{125\cdot 27} = 5\cdot 3 = \underline{\underline{15}}$

[1] Jede Wurzel mit geraden Wurzelexponenten kann positiv oder negativ sein. Wenn nicht ausdrücklich beide Vorzeichen ($\pm$) angegeben sind, so sind die vor dem Wurzelzeichen angegebenen Vorzeichen maßgebend.

Es ist nun nicht immer möglich, ein Produkt in radizierbare Faktoren zu zerlegen. Oft müssen wir uns damit begnügen, es in einen radizierbaren und einen nicht radizierbaren Teil aufzuspalten.

29. Beispiel: a) $\sqrt{9\,m} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{m} = \underline{\underline{3\sqrt{m}}}$

b) $\sqrt{25\,a - 25\,b} = \sqrt{25\,(a - b)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{a - b} = \underline{\underline{5\sqrt{a - b}}}$

c) $\sqrt[3]{5\,a^3\,b^4} = \sqrt[3]{5 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b} = \underline{\underline{ab\sqrt[3]{5\,b}}}$

Wir können auch umgekehrt einen vor der Wurzel stehenden Faktor unter die Wurzel bringen. Er muß dann bei einer Quadratwurzel mit 2, bei einer Kubikwurzel mit 3 usw., bei einer $n$ten Wurzel mit n potenziert werden. Dadurch lassen sich manche Wurzelausdrücke vereinfachen.

30. Beispiel: a) $a\sqrt{\dfrac{1}{a}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{a}} = \underline{\underline{\sqrt{a}}}$

b) $5\sqrt{0{,}2} = \sqrt{25 \cdot 0{,}2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

c) $(a - b)\sqrt{\dfrac{a + b}{a - b}} = \sqrt{\dfrac{(a - b)^2 \cdot (a + b)}{a - b}}$

$= \sqrt{(a - b)\,(a + b)} = \underline{\underline{\sqrt{a^2 - b^2}}}$

d) $a\sqrt{a^{-3}} = \sqrt{a^2 \cdot a^{-3}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{a^3}} = \sqrt{\dfrac{1}{a}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{a}}}}$

Division von Wurzeln

Gleichnamige Wurzeln werden dividiert, indem man ihre Radikanden durcheinander dividiert:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

31. Beispiel: a) $\sqrt{ab} : \sqrt{a} = \sqrt{\dfrac{ab}{a}} = \underline{\underline{\sqrt{b}}}$

b) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = \underline{\underline{\pm 2}}$

Die Division ungleichnamiger Wurzeln erfolgt ähnlich wie die Multiplikation ungleichnamiger Wurzeln. Sie sind zuerst gleichnamig zu machen.

32. Beispiel: a) $\sqrt[10]{x} : \sqrt[15]{x} = \dfrac{\sqrt[30]{x^3}}{\sqrt[30]{x^2}} = \sqrt[30]{\dfrac{x^3}{x^2}} = \underline{\underline{\sqrt[30]{x}}}$

b) $\dfrac{\sqrt[8]{64}}{\sqrt[4]{20}} = \dfrac{\sqrt[8]{2^6}}{\sqrt[4]{2^2 \cdot 5}} = \dfrac{\sqrt[8]{2^6}}{\sqrt[8]{2^4 \cdot 5^2}} = \sqrt[8]{\dfrac{2^2}{5^2}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{\dfrac{2}{5}}}}$

Radizieren einer Wurzel

Man zieht die Wurzel aus einer Wurzel, indem man die Wurzelexponenten multipliziert.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$$

33. Beispiel: a) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2 \cdot 2]{16} = \underline{\underline{2}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[2 \cdot 3]{a^6} = \underline{\underline{a}}$

c) $\sqrt{\sqrt[4]{b^5}} = \sqrt[2 \cdot 4]{b^5} = \underline{\underline{\sqrt[8]{b^5}}}$

Wie wir gesehen haben, kann man in beliebiger Reihenfolge radizieren.

34. Beispiel: a) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{27}}} = \sqrt{\sqrt[4]{3}} = \underline{\underline{\sqrt[8]{3}}}$

b) $\sqrt[6]{\sqrt[8]{5x}} + 2\sqrt{\sqrt[24]{5x}} - 5\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{5x}}} + 3\sqrt[4]{\sqrt[12]{5x}}$
$= \sqrt[48]{5x} + 2\sqrt[48]{5x} - 5\sqrt[48]{5x} + 3\sqrt[48]{5x} = \underline{\underline{\sqrt[48]{5x}}}$

Ebenso wie man Wurzelexponent und Potenzexponent mit derselben Zahl erweitern kann, darf man beide auch durch die gleiche Zahl kürzen. Also:

$$\sqrt[nx]{a^{px}} = \sqrt[n]{a^p}$$

35. Beispiel: a) $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = \underline{\underline{a^4}}$ b) $\sqrt[7]{a^{14}} = a^{\frac{14}{7}} = \underline{\underline{a^2}}$

c) $\sqrt[6n]{b^{3n}} = b^{\frac{3n}{6n}} = b^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{b}}}$

d) $\sqrt[10]{a^{-5}} = a^{\frac{-5}{10}} = a^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{a}}}}$

e) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{c^{10}}} = \sqrt[24]{c^{10}} = c^{\frac{10}{24}} = c^{\frac{5}{12}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{c^5}}}$

Zusammenfassung der Rechenregeln mit Wurzeln

1) Potenzieren und Radizieren mit denselben Zahlen heben sich auf. Die Reihenfolge des Potenzierens und Radizierens ist beliebig.

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

2) Jede Bruchpotenz bedeutet eine Wurzel.

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

3) Man kann in beliebiger Reihenfolge radizieren.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

4) Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden Faktor einzeln radiziert.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

5) Ein Bruch wird radiziert, indem man Zähler und Nenner einzeln radiziert.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

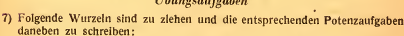
6) Eine Wurzel wird radiziert, indem man die Wurzelexponenten multipliziert.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

7) Man darf Wurzelexponenten und Potenzexponenten durch dieselbe Zahl erweitern und kürzen.

$$\sqrt[nx]{a^{px}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Übungsaufgaben



7) Folgende Wurzeln sind zu ziehen und die entsprechenden Potenzaufgaben daneben zu schreiben:

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[6]{1000000}$ d) $\sqrt[10]{1024}$ e) $\sqrt[3]{0{,}027}$

f) $\sqrt[4]{0{,}0016}$ g) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{7}{1000}}$ i) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ k) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

8) Welche der nachstehenden Wurzeln sind rational, welche irrational?

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[6]{0}$ d) $\sqrt[3]{0{,}009}$ e) $\sqrt[10]{1}$

9) Folgende Bruchpotenzen sind als Wurzeln zu schreiben:

a) $a^{\frac{1}{2}}$ b) $b^{\frac{1}{10}}$ c) $v^{\frac{8}{3}}$ d) $d^{1\frac{1}{7}}$

10) Folgende Wurzeln sind zu vereinigen:

$5\sqrt[7]{8} + 2\sqrt[6]{11} - 9\sqrt[7]{8} + 9\sqrt[6]{11} + 4\sqrt[7]{8}$

11) Folgende Ausdrücke sind zu berechnen:

a) $(\sqrt{3a} + \sqrt{a})(\sqrt{3a} - \sqrt{a})$

b) $(3\sqrt{11} + 7\sqrt{2})(3\sqrt{11} - 7\sqrt{2})$

12) Folgende Aufgaben sind zu lösen:

a) $\sqrt{b} \cdot \sqrt[6]{b}$ b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}$ c) $\sqrt[6]{c} \cdot \sqrt[9]{c}$

13) Folgende Produkte sind durch Zerlegen in radizierbare Faktoren zu radizieren:

a) $\sqrt{8 \cdot 2}$ b) $\sqrt{75 \cdot 3}$ c) $\sqrt{32 \cdot 18}$ d) $\sqrt{162 \cdot 200}$

14) Der Faktor vor der Wurzel ist unter die Wurzel zu bringen:

a) $z\sqrt[4]{\frac{y}{z}}$ b) $m\sqrt[3]{\frac{1}{m^2}}$ c) $25\sqrt{0{,}08}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}$

Logarithmen

Wenn wir Ausdrücke von der folgenden Form $\frac{8{,}6 \cdot \pi \cdot 51{,}4}{360}$ auszurechnen haben, so müssen wir dazu eine nicht unerhebliche Rechenarbeit leisten. Wir können die Ausrechnung aber bedeutend vereinfachen, wenn wir die Logarithmentafeln benutzen, die wir in allen technischen Rechenbüchern, wie z. B. in unseren Technischen Tabellen, S. 16, finden. Außerdem werden wir bald sehen, daß beim Logarithmieren die Gefahr des Verrechnens erheblich vermindert ist.

Was sind nun Logarithmen, und wie rechnen wir mit ihnen? Wir betrachten die Potenzgleichung:

$$3^4 = 81$$

Dabei haben wir drei Größen:

1) die Basis 3
2) den Exponenten 4
3) das Ergebnis 81

Sind zwei Größen dieser Gleichung bekannt, so kann die dritte gefunden werden. Es können drei verschiedene Aufgaben gestellt sein.

1) Die Basis 3 und der Exponent 4 sind bekannt, dann ist das Ergebnis der Potenz $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
2) Der Exponent 4 und die Zahl 81 sind bekannt, dann finden wir die Basis 3 aus $\sqrt[4]{81}$ und nennen dieses Verfahren das Wurzelziehen.
3) Die Basis 3 und die Zahl 81 sind bekannt. Jetzt soll der Exponent 4 gefunden werden. Diese Rechnung bedeutet die zweite Umkehrung des Potenzierens. Das Verfahren, das wir hierbei anwenden müssen, um zum Ziele zu gelangen, heißt das logarithmische Verfahren, wir logarithmieren.

Zusammenfassend sagen wir: Wir potenzieren die Basis, um die gegebene Zahl zu erhalten. Wir ziehen die Wurzel aus der gegebenen Zahl, um die Basis zu bekommen, und wir logarithmieren die gegebene Zahl, um den Exponenten zu finden. Im letzten Falle bezeichnen wir den gesuchten Exponenten auch als „Logarithmus der Zahl 81 zur Basis 3“ und schreiben diesen Satz in folgender Form:

$${}^{3}\log 81 = 4$$

Wir üben mit einigen Beispielen:

$${}^{4}\log 64 = 3, \text{ denn } 4^3 = 64$$
$${}^{2}\log 128 = 7, \text{ denn } 2^7 = 128$$
$${}^{9}\log 6561 = 4, \text{ denn } 9^4 = 6561$$
$${}^{10}\log 10000 = 4, \text{ denn } 10^4 = 10000$$
$${}^{10}\log 1000 = 3, \text{ denn } 10^3 = 1000$$

$^{10}\log 100 \quad = 2$, denn $10^2 = 100$
$^{10}\log 10 \quad = 1$, denn $10^1 = 10$
$^{10}\log 1 \quad = 0$, denn $10^0 = 1$ [1]

Die letzten 5 Logarithmen haben für uns eine besondere Bedeutung.

1) Wir erkennen, daß jedesmal die Basis 10 gewählt wurde. Das geschah mit besonderer Absicht. Unser gesamtes Zahlensystem ist ja auf der 10 aufgebaut. Es lag daher nahe, alle Logarithmen mit der Basis 10 zu einem System zusammenzufassen. Man nennt diese Logarithmen deshalb dekadische Logarithmen. Für die Mehrzahl der Aufgaben des technischen Rechnens, die man logarithmisch berechnet, benutzt man die dekadischen Logarithmen. In unseren weiteren Abhandlungen befassen wir uns lediglich mit diesen. Aus Gründen der Vereinfachung läßt man die Basis 10 beim Schreiben fort und schreibt als Abkürzung statt $^{10}\log$ einfach lg.

Statt $^{10}\log 10000 = 4$ wird geschrieben $\lg 10000 = 4$,
statt $^{10}\log 1000 = 3$ wird geschrieben $\lg 1000 = 3$,
statt $^{10}\log 100 = 2$ wird geschrieben $\lg 100 = 2$,
statt $^{10}\log 10 = 1$ wird geschrieben $\lg 10 = 1$,
statt $^{10}\log 1 = 0$ wird geschrieben $\lg 1 = 0$.

2) Wir sehen weiterhin, daß der dekadische Logarithmus aller vierstelligen Zahlen (z. B. 2182; 5371; 9116) mindestens 3, daß der Logarithmus aller dreistelligen Zahlen (z. B. 118; 425; 982) mindestens 2, daß der Logarithmus aller zweistelligen Zahlen (z. B. 72; 13; 87) mindestens 1 und der aller einstelligen Zahlen mindestens 0 betragen muß.

Greifen wir einmal die Zahl 982 heraus. Ihr Logarithmus muß mindestens 2 sein, 3 kann nicht erreicht werden, weil der Logarithmus der Zahl 1000 gleich 3 ist. Also muß sich der Logarithmus der Zahl 982 zusammensetzen aus 2 und einem Zuschlag, aus $2 + 0, \ldots$ Die ganze Zahl (hier 2) nennt man Kennziffer, und den Zuschlag, der ein Dezimalbruch ist, bezeichnet man mit Mantisse. Wir bestimmen demnach die Kennziffer für unseren gesuchten Logarithmus zur Zahl 982 mit 2. Den Zuschlag oder die Mantisse entnehmen wir der Tabelle mit 9921 [2]. So haben wir den log 982 gefunden mit 2,9921. Jetzt sehen wir uns obige Beispiele noch einmal an und stellen fest: Die Kennziffer der Logarithmen ist immer um 1 kleiner als die Stellenzahl des Numerus, d. h. der Zahl, dessen Logarithmus gesucht werden soll. Diese Regel prägen wir uns fest ein.

[1] $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$, es ist aber: $\frac{a^n}{a^n} = 1$, also auch $a^0 = 1$.

[2] Den Logarithmus für eine dreistellige Zahl finden wir so:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
98	→	→	9921							

Wir üben uns jetzt im Auffinden der Logarithmen bei gegebenem Numerus.

Nach der Tabelle ist:

$$\lg 20 = 1{,}3010 \qquad \lg 145 = 2{,}1614$$
$$\lg 40 = 1{,}6021 \qquad \lg 290 = 2{,}4624$$
$$\lg 60 = 1{,}7782 \qquad \lg 435 = 2{,}6385$$
$$\lg 80 = 1{,}9031 \qquad \lg 580 = 2{,}7634$$

Wir sehen an diesen Beispielen, wenn der Numerus sich verdoppelt, verdoppelt sich nicht etwa die Mantisse; das ist eine Erkenntnis, die später von Bedeutung sein wird.

Wir schlagen weiter auf:

$$\lg 9{,}0 = 0{,}9542 \qquad \lg 7{,}0 = 0{,}8451$$
$$\lg 90{,}0 = 1{,}9542 \qquad \lg 70{,}0 = 1{,}8451$$

Dabei bemerken wir, daß das Komma des Numerus ohne Einfluß auf die Mantisse ist.

Ein weiteres Beispiel:

$$\lg 225 = 2{,}3522$$
$$\lg 22{,}5 = 1{,}3522$$
$$\lg 2{,}25 = 0{,}3522$$

Weil die Kennziffer immer um 1 kleiner sein muß, erhalten wir:

$$\lg 0{,}225 = 0{,}3522 - 1$$
$$\lg 0{,}0225 = 0{,}3522 - 2 \text{ usw.}$$

Wir kehren jetzt die Aufgabe um. Wir wollen den Numerus aufsuchen, wenn der Logarithmus gegeben ist. Es sei $\lg N = 2{,}9117$. Wie groß ist der Numerus?

Wir sehen sofort, der Numerus muß eine dreistellige Zahl sein, weil die Kennziffer ja 2 ist. Nach der Tabelle gehört zu der Mantisse 9117 die Ziffernfolge 816. Das ist auch schon das Ergebnis. Zu dem Logarithmus 2,9117 gehört also der Numerus $N = 816$. Weitere Beispiele:

$$\lg N = 2{,}9595 \qquad N = 911$$
$$\lg N = 0{,}5119 \qquad N = 3{,}25$$
$$\lg N = 0{,}4771 - 1 \qquad N = 0{,}3$$

Damit haben wir kennengelernt, wie man die Logarithmen oder den Numerus aus den Tafeln findet.

Wir fassen zusammen:

Das Logarithmieren ist eine Umkehrung des Potenzierens. Dabei gilt es, den Exponenten zu finden, wenn der Numerus bekannt ist. Als Basis wurde die Zahl 10 gewählt, daher der Name dekadische Logarithmen. In diesem System ist die Kennziffer immer um 1 kleiner als die Stellenzahl des Numerus, während die Mantissen 0, . . . für die Zehnerlogarithmen aller Zahlen, die die gleiche Ziffernfolge haben, gleich sind.

Wir wollen nun 305 · 7,48 logarithmisch berechnen. Jede Zahl kann als eine Potenzgröße mit der Basis 10 aufgefaßt werden. Nach der Tabelle ist lg 305 = 2,4843; das heißt: $10^{2,4843} = 305$. Ebenso ist $10^{0,8739} = 7,48$; denn lg 7,48 = 0,8739.

Die beiden Exponenten 2,4843 und 0,8739 haben wir mit Hilfe der Logarithmentafel gefunden. Für die beiden Potenzen $10^{2,4843}$ und $10^{0,8739}$ gelten natürlich auch die Regeln für das Rechnen mit Potenzen. Sie lauten: Sind zwei Potenzen zu multiplizieren, so werden ihre Exponenten addiert, z. B. $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$. Soll eine Potenz durch eine andere dividiert werden, so werden ihre Exponenten subtrahiert, z. B.:

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$$

Unser Beispiel ist danach auch so zu schreiben:

$$305 \cdot 7,48 = 10^{2,4843} \cdot 10^{0,8739} = 10^{2,4843+0,8739} = 10^{3,3582}$$

Der Numerus zu Logarithmus 3,3582 ist nichts anderes als das ausgerechnete Ergebnis der Potenz $10^{3,3582}$. Wir finden dieses Ergebnis in der Logarithmentafel: $10^{3,3582} = 2281$.

Beim Dividieren würden wir folgendes Bild erhalten:

$$305 : 7,48 = 10^{2,4843} : 10^{0,8739} = 10^{2,4843-0,8739} = 10^{1,6104} = 40,8$$

Die logarithmische Lösung dieser beiden Aufgaben schreibt man übersichtlicher in nachstehender Form:

a) $305 \cdot 7,48 = x$.

$$\begin{array}{rl} \lg 305 &= 2,4843 \\ \lg 7,48 &= 0,8739 \\ \hline \lg x &= 3,3582 \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{2281} \end{array}$$

b) $\frac{305}{7,48} = y$

$$\begin{array}{rl} \lg 305 &= 2,4843 \\ \lg 7,48 &= 0,8739 \\ \hline \lg y &= 1,6104 \\ \boldsymbol{y} &= \mathbf{40,8} \end{array}$$

Für den praktischen Gebrauch merken wir uns folgende Hauptregeln:

1) Man erhält den Logarithmus eines Produktes, indem man die Logarithmen der Faktoren addiert:

$$\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b$$

2) Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, indem man den Logarithmus des Dividenden um den des Divisors vermindert:

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$$

Wir sehen daraus, daß die Aufgaben des Multiplizierens und Dividierens bei Verwendung der Logarithmen auf ein Addieren und Sub-

trahieren zurückgeführt werden. Darin liegt der Vorteil beim logarithmischen Rechnen.

Zur Einprägung des bisher Gelernten wollen wir die anfangs erwähnte Aufgabe jetzt mit und zum Vergleich auch ohne Logarithmen lösen.

36. Beispiel: $b = \frac{8{,}6 \cdot \pi \cdot 51{,}4}{360}$

Lösung: a) Mit Logarithmen

$$\begin{array}{ll} \lg 8{,}6 & = 0{,}9345 \\ \lg \pi & = 0{,}4969 \\ \lg 51{,}4 & = 1{,}7110 \\ \hline \lg \text{Zähler} & = 3{,}1424 \\ \lg 360 & = 2{,}5563 \\ \hline \lg b & = 0{,}5861 \\ b & = 3{,}855 \approx \mathbf{3{,}86} \end{array}$$

b) Ohne Logarithmen

$$\begin{array}{l} 3{,}14 \cdot 8{,}6 \\ \hline \quad 1884 \\ 2512 \\ \hline 27{,}004 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 27{,}004 \cdot 51{,}4 \\ \hline 108016 \\ 27004 \\ 135020 \\ \hline 1388{,}0056 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1388{,}0056 : 360 \\ = 138{,}80056 : 36 = 3{,}855 \\ \quad 108 \qquad\qquad \approx 3{,}86 \\ \quad \overline{308} \\ \quad288 \\ \quad \overline{200} \\ \quad180 \\ \quad \overline{200} \\ \quad180 \\ \quad \overline{-} \end{array}$$

Dieses Beispiel zeigt klar, daß solche Ausdrücke viel einfacher mit Logarithmen als ohne diese ausgerechnet werden können und daß dabei die Gefahr, Rechenfehler zu machen, viel kleiner ist.

Es kommt vor, daß wir den Logarithmus für eine 4stellige Zahl haben wollen, z. B. für 7235. Obwohl wir in unseren Tabellen die dekadischen Logarithmen nur für 3stellige Zahlen finden, können wir trotzdem mit genügender Genauigkeit den Logarithmus für die 4stellige Zahl aus diesen Tabellen ablesen. Wir interpolieren, d. h. wir bestimmen den Zwischenwert. Zunächst stellen wir den Logarithmus für die benachbarten vollen Zehner fest, in unserem Falle:

$$\lg 7230 = 3{,}8591$$
$$\text{und } \lg 7240 = 3{,}8597$$

Die Differenz dieser beiden Mantissenwerte ist 6. Man kann auch sagen, die Mantisse für lg 7240 vergrößert sich gegenüber der für lg 7230, also für 10 Ziffern, um 6 Werte. Folglich vergrößert sich für 1 Ziffer der 4. Stelle die Mantisse um 0,6. In unserem Falle beträgt der Wertzuwachs für die 5 Ziffern an der 4. Stelle demnach $5 \cdot 0{,}6 = 3$.

Es ergibt sich so der Logarithmus für 7235 in nachstehender Form:

$$\begin{array}{ll} \lg 7230 & = 3{,}8591 \\ \text{Zuwachs} & = \quad +3 \\ \hline \lg 7235 & = 3.8594 \end{array}$$

Beim Suchen des 4stelligen Numerus zum gegebenen Logarithmus ist für einen Zwischenwert entsprechend zu verfahren. Versuchen wir bei der Lösung der folgenden Aufgaben zu interpolieren! Es soll die Potenz $7{,}235^3$ logarithmisch berechnet werden. Für die Lösung ist nichts anderes zu tun, als die Basis 7,235 dreimal als Faktor zu setzen:

$$7{,}235^3 = 7{,}235 \cdot 7{,}235 \cdot 7{,}235$$

Diese Gleichung logarithmieren wir nach der 1. Hauptregel:

$$\lg (7{,}235)^3 = \lg 7{,}235 + \lg 7{,}235 + \lg 7{,}235 = 3 \cdot \lg 7{,}235 = 3 \cdot 0{,}8594 = 2{,}5782$$

Für das Endergebnis ist noch der Numerus aufzuschlagen. Dabei müssen wir wieder interpolieren. Zunächst stellen wir die benachbarten Tabellenwerte fest:

Für $\lg N = 2{,}5775$ ist $N = 378{,}0$
Für $\lg N = 2{,}5786$ ist $N = 379{,}0$

Für die 11 Mantissenwerte $(5786 - 5775 = 11)$ stehen uns 10 Ziffern der 4. Stelle zur Verfügung, für 1 Mantissenwert demnach $\frac{10}{11}$ Ziffern, mithin bekommt die 4. Stelle für die 7 Mantissenwerte $(5782 - 5775 = 7)$ die Ziffer $7 \cdot \frac{10}{11} = \frac{70}{11} \approx 6$.

$\lg N = 2{,}5782$
$N = 378{,}6$

Es ist also $7{,}235^3 = \mathbf{378{,}6}$

Aus dem oben gefundenen Wert für $\lg 7{,}235^3 = 3 \cdot \lg 7{,}235$ ergibt sich die 3. Hauptregel:

Man erhält den Logarithmus einer Potenz, indem man den Logarithmus der Basis mit dem Exponenten multipliziert.

Will man ferner die Wurzel $\sqrt[3]{7{,}235}$ logarithmisch berechnen, so kann man auch schreiben: $\sqrt[3]{7{,}235} = 7{,}235^{\frac{1}{3}}$. Dadurch ist die Wurzel eine Potenzgröße geworden, die wir nach der 3. Hauptregel behandeln. Wir erhalten dann:

$$\lg \sqrt[3]{7{,}235} = \lg (7{,}235)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3} \cdot \lg 7{,}235 = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}8594 = 0{,}2865$$

Hierzu ist der Numerus $= 1{,}934$.

Also:

$$\sqrt[3]{7{,}235} = \mathbf{1{,}934}$$

Aus $\lg \sqrt[3]{7{,}235} = \frac{1}{3} \cdot \lg 7{,}235$ leiten wir die 4. Hauptregel ab. Sie lautet:

Man erhält den Logarithmus einer Wurzel, indem man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert.

Die 3. und 4. Regel kann man als Formel zum leichten Einprägen wie folgt ausdrücken:

$$\lg a^n = n \cdot \lg a$$

$$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a$$

Man schreibt Ausrechnungen nach diesen Formeln gewöhnlich so, wie nachstehende Beispiele zeigen:

1) Es soll der Rauminhalt x eines Würfels mit der Kantenlänge 7,235 cm bestimmt werden.

$$x = 7{,}235^3$$
$$\lg x = \lg 7{,}235^3 = 3 \cdot \lg 7{,}235 \approx 3 \cdot 0{,}8594 = 2{,}5782$$
$$\underline{\underline{\boldsymbol{x = 378{,}6 \text{ cm}^3}}}$$

2) Wie lang ist die Kante y eines Würfels, dessen Rauminhalt 7,235 cm³ beträgt?

$$y = \sqrt[3]{7{,}235}$$
$$\lg y = \lg \sqrt[3]{7{,}235} = \tfrac{1}{3} \cdot \lg 7{,}235 = \tfrac{1}{3} \cdot 0{,}8594 = 0{,}2865$$
$$\underline{\underline{\boldsymbol{y = 1{,}934 \text{ cm}}}}$$

Während Multiplizieren und Dividieren auf Addieren und Subtrahieren zurückgeführt werden, lassen sich Potenzieren und Radizieren auf Multiplizieren und Dividieren zurückführen. Damit ist das vorteilhaftere Rechnen mit Logarithmen bewiesen.

Die 4 Grundregeln stellen wir hier noch einmal zusammen:

$$\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b$$
$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$$
$$\lg a^n = n \cdot \lg a$$
$$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a$$

Manchmal stellen sich aber doch einige Schwierigkeiten ein, die wir jetzt behandeln wollen.

37. Beispiel: $x = \dfrac{19}{276}$

Ein echter Bruch soll logarithmisch ausgerechnet werden. Da der Nenner größer als der Zähler ist, bekommen wir für $\lg x$ einen negativen Wert. Unsere Tabellen enthalten aber nur positive Logarithmen. Hier hilft ein kleiner Kunstgriff. Wir erhöhen die Kennziffer um 1 oder, wenn nötig, um 2 und ziehen diese Zahl nachträglich wieder ab. Dadurch wird der Wert des Ausdruckes nicht geändert.

$$x = \frac{19}{276} \qquad \lg x = \lg 19 - \lg 276$$

$$\begin{aligned} \lg 19 &= 1{,}2788 = 3{,}2788 - 2 \\ \lg 276 &= 2{,}4409 \\ \hline \lg x &= 0{,}8379 - 2 \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0{,}06885} \end{aligned}$$

Eine andere Schwierigkeit ergibt sich, wenn die Kennziffer keine ganze Zahl, sondern z. B. ein Bruch ist: $x = \sqrt[3]{0{,}01234}$. Hier wird:

$$\lg x = \frac{1}{3} \cdot \lg 0{,}01234 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}0913 - 2) = \frac{0{,}0913 - 2}{3} = 0{,}0304 - \frac{2}{3}$$

Die Kennziffer des Numerus darf aber nur eine ganze Zahl sein. Wir helfen uns auf folgende Weise:

$$\text{Statt } \lg x = \frac{0{,}0913 - 2}{3} \text{ schreiben wir } \lg x = \frac{1{,}0913 - 3}{3}$$

Der Wert des Bruches wird wieder nicht geändert. Jetzt teilen wir durch 3 und erhalten:

$$\lg x = 0{,}3638 - 1$$
$$\underline{\underline{x = 0{,}2311}}$$

Bei umfangreichen Ausdrücken, z. B. $x = \frac{52^2 \cdot 17{,}5 \cdot \sqrt{0{,}36}}{9180 \cdot 0{,}324 \cdot 0{,}25^2}$, geht man zweckmäßig folgendermaßen vor: Den Zähler nennt man A und den Nenner B. Dann ist:

$$x = \frac{A}{B}; \ \lg x = \lg A - \lg B$$

$$\lg A = 2 \cdot \lg 52 + \lg 17{,}5 + \tfrac{1}{2} \lg 0{,}36$$
$$\lg B = \lg 9180 + \lg 0{,}324 + 2 \cdot \lg 0{,}25$$

Unter Zuhilfenahme der Logarithmentafeln finden wir:

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot \lg 52 = 3{,}4320 & \lg 9180 = 3{,}9628 \\ \lg 17{,}5 = 1{,}2430 & \lg 0{,}324 = 0{,}5105 - 1 \\ \tfrac{1}{2} \lg 0{,}36 = 0{,}7782 - 1 & 2 \cdot \lg 0{,}25 = 0{,}7958 - 2 \\ \hline \lg A = 4{,}4532 & \lg B = 2{,}2691 \end{array}$$

$$\lg x = \lg A - \lg B = 4{,}4532 - 2{,}2691 = 2{,}1841$$
$$\underline{\underline{x = 152{,}8}}$$

Zur Übung rechnen wir noch einige Beispiele.

38. Beispiel:

$F_I = \sqrt{45{,}50 \cdot 7{,}00 \cdot 25{,}00 \cdot 13{,}50}$ und $F_{II} = \sqrt{59{,}40 \cdot 10{,}90 \cdot 23{,}40 \cdot 15{,}10}$

Wir ziehen jetzt spielend leicht diese Wurzeln.

$$F_I = \sqrt{45{,}50 \cdot 7{,}00 \cdot 25{,}00 \cdot 13{,}50}$$

$$\begin{array}{ll} \lg 45{,}50 = & 1{,}6580 \\ \lg 7{,}00 = & 0{,}8451 \\ \lg 25{,}00 = & 1{,}3979 \\ \lg 13{,}50 = & 1{,}1303 \\ \hline \lg F_I = & \tfrac{1}{2} \cdot 5{,}0313 = 2{,}5156 \\ F_I = & 327{,}8 \text{ m}^2 \end{array}$$

$$F_{II} = \sqrt{59,40 \cdot 10,90 \cdot 23,40 \cdot 15,10}$$

$$\begin{array}{ll} \lg 59,40 = & 1,7738 \\ \lg 10,90 = & 1,0374 \\ \lg 23,40 = & 1,3692 \\ \lg 15,10 = & 1,1790 \\ \hline \lg F_{II} & = \frac{1}{2} \cdot 5,3594 = 2,6797 \\ F_{II} & = 478,3\ \mathrm{m}^2 \end{array}$$

39. Beispiel: Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit v eines Schwungrades mit dem Durchmesser $d = 3,80$ m bei $n = 46$ U/min?

Lösung:
$$v = \frac{d \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{3,8 \cdot \pi \cdot 46}{60}$$

$$\begin{array}{ll} \lg 3,8 & = 0,5798 \\ \lg \pi & = 0,4969 \\ \lg 46 & = 1,6628 \\ \hline \lg \text{Zähler} & = 2,7395 \\ \lg 60 & = 1,7782 \\ \hline \lg v & = 0,9613 \\ & v = 9,15\ \mathrm{m/s} \end{array}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades ist **9,15 m/s.**

40. Beispiel:
$$\sqrt[3]{\frac{1}{0,6948}} = ?$$

Lösung: lg Ergebnis $= \frac{1}{3} \cdot$ (lg Zähler — lg Nenner)

lg Zähler = lg 1 = 0,0000

lg Nenner = lg 0,6948

lg 0,694 = 0,8414 — 1

lg 0,695 = 0,8420 — 1

Differenz 0,001 entspricht 6 Punkten

Differenz 0,001 · 0,8 entspricht 0,8 · 6 ≈ 5 Punkten

lg 0,6948 = 0,8414 — 1
+ 0,0005 = 0,8419 — 1

lg Zähler — lg Nenner = — 0,8419 + 1
= 0,1581

lg Ergebnis $= \frac{1}{3} \cdot 0,1581 = 0,0527$

Ergebnis = Numerus zu 0,0527

Kennziffer 0, also Ergebnis 1stellig ....

Mantisse 0527 zwischen 0492, entsprechend Numerus 1,12
und 0531 entsprechend Numerus 1,13 gelegen

Differenz 39 Punkte entspr. Num. 0,01

wahre Differenz 35 Punkte entspr. $\frac{35}{39} \cdot 0,1 = 0,009$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{0,6948}} = \underline{\underline{1,129}}$$

41. Beispiel: lg 0,001 x = ?

Lösung: lg 0,001 x = lg 0,001 + lg x = **— 3 + lg x**

42. Beispiel: $\lg \frac{1}{abc} = ?$

Lösung: $\lg \frac{1}{abc} = \lg \text{Zähler} - \lg \text{Nenner} = 0 - \lg abc$
$= \underline{\underline{-(\lg a + \lg b + \lg c)}}$

43. Beispiel: $\lg \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(b+c)} = ?$

Lösung: $\lg \frac{1}{a(b+c)} = \lg \text{Zähler} - \lg \text{Nenner} = 0 - \lg a \cdot (b+c)$
$= \underline{\underline{-[\lg a + \lg (b+c)]}}$

44. Beispiel: $\lg ab^2 = ?$

Lösung: $\lg ab^2 = \lg a + \lg b^2 = \underline{\underline{\lg a + 2 \cdot \lg b}}$

45. Beispiel: $\lg a^5 \cdot 10^{-3} = ?$

Lösung: $\lg a^5 \cdot 10^{-3} = \lg a^5 + \lg 10^{-3} = 5 \cdot \lg a + (-3) \cdot \lg 10$
$= 5 \lg a - 3 \cdot 1 = \underline{\underline{5 \lg a - 3}}$

46. Beispiel: $\lg \sqrt{a} \sqrt[3]{b^2} = ?$

Lösung: $\lg \sqrt{a} \sqrt[3]{b^2} = \lg \sqrt{a} + \lg \sqrt[3]{b^2} = \lg a^{\frac{1}{2}} + \lg b^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} \lg a + \tfrac{2}{3} \lg b}}$

47. Beispiel: $\lg \left(x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}\right) = ?$

Lösung: $\lg \left(x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}\right) = \lg x^{-\frac{1}{2}} + \lg y^{-\frac{3}{4}} = -\tfrac{1}{2} \lg x + (-\tfrac{3}{4}) \lg y$
$= \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}(\lg x + \tfrac{3}{2} \lg y)}}$

48. Beispiel: $\lg 2$ ist $= 0{,}3010$. Was ergibt dann:

a) $\lg \frac{1}{200}$; b) $\lg 0{,}05$; c) $\lg 50$; d) $\lg 0{,}005$; e) $\lg 4$; f) $\lg 16$.

Lösungen:

a) $\lg \frac{1}{200} = 0 - \lg 200 = -2{,}3010 = 3 - 2{,}3010 - 3 = \underline{\underline{0{,}6990 - 3}}$

b) $\lg 0{,}05 = \lg \frac{5}{100} = \lg \frac{1}{20} = 0 - \lg 20 = -1{,}3010 = 2 - 1{,}3010 - 2$
$= \underline{\underline{0{,}6990 - 2}}$

c) $\lg 50 = \lg \frac{100}{2} = \lg 100 - \lg 2 = 2 - 0{,}3010 = \underline{\underline{1{,}6990}}$

d) $\lg 0{,}005 = \lg \frac{5}{1000} = \lg \frac{1}{200} = 0 - \lg 200 = -2{,}3010 = 3 - 2{,}3010 - 3$
$= \underline{\underline{0{,}6990 - 3}}$

e) $\lg 4 = \lg 2^2 = 2 \cdot \lg 2 = 2 \cdot 0{,}3010 = \underline{\underline{0{,}6020}}$

f) $\lg 16 = \lg 2^4 = 4 \cdot \lg 2 = 4 \cdot 0{,}3010 = \underline{\underline{1{,}2040}}$

49. Beispiel: $\sqrt[3]{\frac{8}{45{,}69} - \frac{3}{0{,}09208}} = ?$

Lösung: $\sqrt[3]{\frac{8}{45{,}69} - \frac{3}{0{,}09208}} = \sqrt[3]{A - B}$

a) $\lg A = \lg 8 - \lg 45{,}69$

$\lg 45{,}6 = 1{,}6590$
$\lg 45{,}7 = 1{,}6599$

Differenz 0,1 entspricht 9 Punkten
$(45{,}69 - 45{,}6)$ „ $0{,}9 \cdot 9 = 8{,}1$ Pkt.

$\lg 45{,}69 = 1{,}6590$
$+ \quad 8{,}1$

$\lg 8$	$= 1{,}9031 - 1$
$\lg 45{,}69$	$= 1{,}6598$
$\lg A$	$= 0{,}2433 - 1$

Kennziffer ist -1, daher $A = 0, \ldots$

Mantisse 2433 liegt zwischen 2430 entsprechend 0,175
und 2455 entsprechend 0,176
Differenz 25 Punkte entspr. 0,001

wahre Differenz $(2433 - 2430) = 3$ Punkte entspr. $0{,}001 \; (3:25) = 0{,}00012$

Also ist:

A = 0,1751

b) $\lg B = \lg 3 - \lg 0{,}09208$

$\lg 0{,}0920 = 0{,}9638 - 2$
$\lg 0{,}0921 = 0{,}9643 - 2$

Differenz 0,0001 entspricht 5 Punkten
$(0{,}09208 - 0{,}0920)$ „ $0{,}8 \cdot 5 = 4$ Pkt. $= 0{,}0004$

$\lg 0{,}09208 = 0{,}9638 - 2$
$+ 0{,}0004$
$0{,}9642 - 2$

$\lg 3$	$= 0{,}4771$
$\lg 0{,}09208$	$= 0{,}9642 - 2$
$\lg B$	$= 2{,}4771$
	$- 0{,}9642$
$\lg B$	$= 1{,}5129$

Kennziffer zu $\lg B$ ist 1, daher $B = \ldots, \ldots$

Mantisse 5129 liegt zwischen 5119 entsprechend 32,5
und 5132 entsprechend 32,6
Differenz 13 Punkte entspr. 0,1
$(5129 - 5119) = 10$ Punkte entspr. $0{,}1 \; (10:13) = 0{,}1 \cdot 0{,}77$

daher **B = 32,577**

c) $A - B = 0{,}175$
$- 32{,}577$
$- 32{,}402$

A − B = − 32,402

d) $\sqrt[3]{-32{,}402} = -\sqrt[3]{32{,}402} = -$ Numerus $(\frac{1}{3} \cdot \lg 32{,}402)$

$\lg 32{,}40 = 1{,}5105$
$\lg 32{,}50 = 1{,}5119$

Differenz 0,10 entspricht 14 Punkten

$$32{,}402 - 32{,}40 = 0{,}002 \text{ entspricht } \frac{0{,}002 \cdot 14}{0{,}10} = \approx 0{,}3 \text{ Punkten}$$

$\lg 32{,}402 = 1{,}5105$
$+ 0{,}00003$
$1{,}51053$

$\frac{1}{3} \cdot \lg 32{,}402 = 1{,}51053 : 3 =$ **0,5035**

e) Numerus zu 0,5035:
Kennziffer 0, also Numerus: . ,. . .
Mantisse 5035 liegt zwischen 5024 entsprechend 3,18
und 5038 entsprechend 3,19

Differenz 14 Punkte entspricht 0,01
5035 — 5024 = 11 Punkte entspr. Zuwachs 0,01 · (11 : 14) = 0,0079

Numerus zu 0,5035 = 3,18
+ 0,008
3,188

Ergebnis: $\sqrt[3]{\frac{8}{45{,}69} - \frac{3}{0{,}09208}} = \underline{\underline{-3{,}188}}$

50. Beispiel: $0{,}35\sqrt[3]{40} + 0{,}65\sqrt[4]{75} + 0{,}80\sqrt[5]{123} = ?$

Lösung: Wir setzen für die einzelnen Summanden die Buchstaben A, B bzw. C und erhalten:

$$0{,}35\sqrt[3]{40} + 0{,}65\sqrt[4]{75} + 0{,}80\sqrt[5]{123} = A + B + C$$

$\lg 40 = 1{,}6021$
$\lg \sqrt[3]{40} = 0{,}5340$
$\lg 0{,}35 = 0{,}5441 - 1$
$\lg A = 0{,}0781$
$A = 1{,}197$

$\lg 75 = 1{,}8751$
$\lg \sqrt[4]{75} = 0{,}4688$
$\lg 0{,}65 = 0{,}8129 - 1$
$\lg B = 0{,}2817$
$B = 1{,}913$

$\lg 123 = 2{,}0899$
$\lg \sqrt[5]{123} = 0{,}4180$
$\lg 0{,}80 = 0{,}9031 - 1$
$\lg C = 0{,}3211$
$C = 2{,}095$

$A = 1{,}197$
$B = 1{,}913$
$C = 2{,}095$
$A + B + C = 5{,}205$

Ergebnis: $0{,}35 \cdot \sqrt[3]{40} + 0{,}65 \cdot \sqrt[4]{75} + 0{,}80\sqrt[5]{123} = \underline{\underline{5{,}205}}$

51. Beispiel: $0{,}358^{0{,}25} = ?$

Lösung: In der vorliegenden Potenz ist der Exponent ein Dezimalbruch. Grundsätzlich rechnen wir hier ebenso wie bisher. Es empfiehlt sich jedoch, von der sonst üblichen Schreibweise abzuweichen und den Logarithmus vor dem Multiplizieren mit 0,25 als eine Zahl zu schreiben.

$$\lg 0{,}358 = 0{,}5539 - 1 = -0{,}4461$$

Statt 0,5539 — 1 schreiben wir also — (1 — 0,5539). Der Klammerwert beträgt 0,4461, so daß sich ergibt: $\lg 0{,}358 = -0{,}4461$

Diese Schreibweise hat den Vorzug, daß nur eine Zahl und nicht eine Differenz mit 0,25 zu multiplizieren ist. Man erhält dann:

$$0{,}25 \cdot \lg 0{,}358 = -0{,}25 \cdot 0{,}4461 = -0{,}1115$$

Nun muß natürlich dieser sich ergebende negative Logarithmus für das Ergebnis wieder in der üblichen Form geschrieben werden.

$$0{,}25 \cdot \lg 0{,}358 = 0{,}8885 - 1$$
$$0{,}358^{0{,}25} = 0{,}7736$$

Ergebnis: $0{,}358^{0{,}25} = \underline{\underline{0{,}7736}}$

Wir wollen nun zum Schluß die Gleichung $\boldsymbol{y = \lg x}$ noch durch eine Bildkurve darstellen.

Wenn wir für x in die Gleichung $y = \lg x$ einige willkürliche Werte einsetzen, z. B. $x = 1$; 5; 10; 15; 20, so finden wir dazu für y die entsprechenden Werte mit der Logarithmentafel. Es ist also

für	$x = 1$	5	10	15	20
	$y = 0$	0,6990	1	1,1761	1,3010

Außer diesen Wertepaaren für x und y lassen sich beliebig viele andere Wertepaare finden. Wählen wir nach Abb. 1 ein rechtwinkliges Achsenkreuz, auf dessen Geraden x bzw. y wir vom Schnittpunkt 0 aus beginnend passende Maßstäbe mit gleichmäßiger Teilung auftragen, so können wir über jedem für x auf der x-Achse gewählten Wert den jeweils zugehörigen Wert für $y = \lg x$ in dem für die y-Achse gewählten Maßstabe als lotrechte Strecke auftragen. Z. B. tragen wir über $x = 20$ senkrecht stehend den Wert $\lg 20 = 1{,}3010$ als das zugehörige y auf. Wir bestimmen so in der Bildebene als Endpunkte der y-Werte eine Anzahl Punkte, deren gegenseitige Lage eindeutig durch die Gleichung $y = \lg x$ festgelegt ist. Zwischen $x = 15$ und $x = 20$ könnten wir u. a. für $x = 15{,}2$; 15,4; 15,6; 15,8 die zugehörigen Werte $y = \lg 15{,}2$; $\lg 15{,}4$; $\lg 15{,}6$; $\lg 15{,}8$ ermitteln und in gleicher Weise wie eben immer neue Punkte in die Abbildung eintragen. Bei genügender, weiterer Unterteilung erhielten wir abermals neue, zueinander dichter und dichter gelegene Punkte, die zuletzt, wie die Abbildung erkennen läßt, ein einheitliches Schaubild für $y = \lg x$ ergeben. Die Ermittelung der wenigen, oben angegebenen Punkte reicht jedoch bereits aus, um den Verlauf der Bildkurve festzulegen.

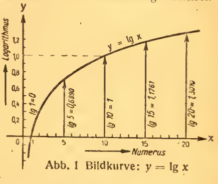


Abb. 1 Bildkurve: $y = \lg x$

Wir sehen, daß die Kurve unterhalb von $x = 1$ einen sehr steilen Verlauf hat und für darüber gelegene Werte immer flacher wird.

Mit Hilfe der zeichnerischen Darstellung lassen sich logarithmische Rechnungen ebenfalls ausführen, wie die nachfolgenden Abbildungen zeigen.

Abb. 2 zeigt die Lösung der Aufgabe $2{,}4 \cdot 3{,}8$. Aus der Zeichnung lesen wir ab $2{,}4 \cdot 3{,}8 = 9{,}1$. Wir überprüfen, ob das Ergebnis richtig sein kann: $2{,}4 \cdot 3{,}8 \approx 2{,}5 \cdot 4 \approx 10$. Wir sehen, es stimmt.

In Abb. 3 lesen wir das zeichnerische Ergebnis für 8,6 : 2,7 mit 3,2 ab. In Abb. 4 finden wir $2{,}1^3 = 9{,}2$, und schließlich ist nach Abb. 5 $\sqrt[3]{6{,}9} = 1{,}9$.

Die Beispiele zeigen insbesondere, wie man als Strecken aufgetragene Logarithmen in einfacher Weise durch Zusammenzählen, Abziehen, Ver-

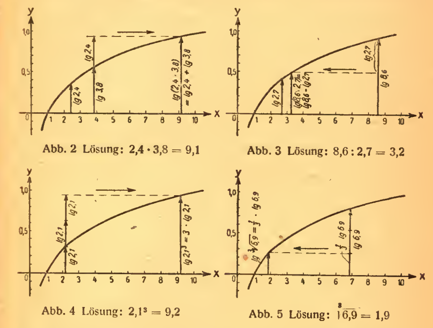


Abb. 2 Lösung: $2{,}4 \cdot 3{,}8 = 9{,}1$

Abb. 3 Lösung: $8{,}6 : 2{,}7 = 3{,}2$

Abb. 4 Lösung: $2{,}1^3 = 9{,}2$

Abb. 5 Lösung: $\sqrt[3]{6{,}9} = 1{,}9$

vielfachen und durch Teilen zur Lösung von Rechenaufgaben benutzen kann. Bei der Besprechung des Rechenschiebers werden wir erkennen, daß dessen Aufbau auf diesen Zusammenhängen beruht. Durch einige Kunstgriffe, auf die aber hier nicht weiter eingegangen werden soll, gelang es ferner, den Rechenschieber so auszustatten, daß dieser bei der Rechnung gleichzeitig Logarithmen und zugehörige Numeruswerte verarbeitet, ohne daß man sich dessen bei seinem Gebrauch bewußt werden muß. Mit diesem Hinweis auf die technische Ausnutzung der Logarithmen zum Bau des heute unentbehrlichen Rechenschiebers wollen wir unsere Betrachtungen über Logarithmen abschließen.

Übungsaufgaben

15) $4{,}69 \cdot 6{,}61 = ?$ 16) $1{,}77 \cdot 0{,}565 = ?$ 17) $0{,}289 \cdot 0{,}346 = ?$

18) $0{,}00353 \cdot 1170 = ?$ 19) $0{,}641 \cdot 0{,}0677 \cdot 22{,}4 \cdot 853 = ?$ 20) $\frac{10{,}6 \cdot 7{,}93}{9.82} = ?$

21) $\frac{0{,}826}{2{,}87 \cdot 23{,}4} = ?$ 22) $0{,}293^5 = ?$ 23) $\sqrt{0{,}0543} = ?$ 24) $0{,}129\sqrt{22} = ?$

25) $\frac{\sqrt{2{,}01^3}}{0{,}885 \cdot \sqrt[3]{0{,}0334}} = ?$ 26) $34{,}56 \cdot 4{,}576 = ?$ 27) $\left(\frac{0{,}2468}{3{,}754}\right)^3 = ?$

Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten

Wir wollen uns jetzt mit Aufgaben befassen, in denen zugleich nach mehreren unbekannten Größen gefragt ist. Wir haben es dann mit Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu tun.

Die Unbekannten bezeichnet man meist mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, v, w usw.

Wir betrachten folgende Aufgabe:

Drei unbekannte Zahlen ergeben zusammen 360. Die zweite Zahl ist 3mal so groß wie die erste; die dritte Zahl beträgt das 5fache der ersten Zahl. Wie heißen die 3 Zahlen?

Lösung: Wir benennen die gesuchten 3 Zahlen der Reihe nach mit x, y und z und erhalten so folgende Gleichungen:

I) Die Summe der 3 Zahlen ist 360. Das besagt:

$$x + y + z = 360$$

II) Die zweite Zahl ist 3mal so groß wie die erste Zahl, d. h.:

$$y = 3x$$

III) Die dritte Zahl beträgt das 5fache der ersten:

$$z = 5x$$

Wir erkennen sofort, daß die erste Gleichung für x noch nicht gelöst werden kann, weil darin die beiden Unbekannten y und z stören.

1. Möglichkeit: Wir müssen die Unbekannten y und z aus der Gleichung I entfernen, indem wir für y bzw. z andere Ausdrücke setzen, in denen nur x als Unbekannte enthalten ist. Das Mittel dazu sind die beiden Gleichungen II und III. Wir ersetzen mit deren Hilfe y durch $3x$ bzw. z durch $5x$ und erhalten:

$$x + 3x + 5x = 360$$

Diese Gleichung enthält nur noch eine einzige Unbekannte; das Ergebnis ist:

$$9x = 360, \text{ d. h. } \underline{\underline{x = 40}}$$

Wir setzen diesen Wert für x ein und erhalten auch die anderen beiden Unbekannten:

$$y = 3x = 3 \cdot 40 = 120 \qquad \underline{\underline{y = 120}}$$

$$z = 5x = 5 \cdot 40 = 200 \qquad \underline{\underline{z = 200}}$$

Wir berechneten also die 3 Unbekannten x, y und z aus 3 Bestimmungsgleichungen (I, II und III). Davon benutzten wir 2 Gleichungen (II und III), um durch Ausscheiden von 2 Unbekannten (y und z) die noch verbliebene Gleichung (I) zu einer Gleichung mit nur einer Unbekannten (x) umzuformen, die sich leicht lösen ließ. Die beiden restlichen Unbekannten (y und z) erhielten wir durch Einsetzen des errechneten Wertes für x. Wir benötigen daher stets zur Lösung einer Aufgabe mit 2 Unbekannten auch 2 zugehörige Bestimmungsgleichungen. Allgemein merken wir uns: Zur Lösung einer Aufgabe mit mehreren Unbekannten müssen ebensoviel Bestimmungsgleichungen gegeben sein, wie Unbekannte bestehen.

Da wir in der Gleichung I die Größen y und z durch Ausdrücke von x aus den Gleichungen II und III ersetzen, wendeten wir hier das sogenannte Einsetzungsverfahren an.

2. Möglichkeit: Wir hätten auch die 3 Gleichungen an Stelle von x zuerst nach y oder nach z auflösen können:

$$y = 3x, \text{ also } x = \frac{y}{3}$$

$$z = 5x, \text{ d. h. } z = 5 \cdot \frac{y}{3}$$

Durch Einsetzung dieser Werte in $x + y + z = 360$ folgt:

$$\frac{y}{3} + y + \frac{5}{3} y = 360, \text{ d. h. } \frac{9}{3} y = 360, \qquad \underline{\underline{y = 120}}$$

$$x = \frac{y}{3} = \frac{120}{3}, \; z = \frac{5}{3} y = \frac{5}{3} \cdot 120, \text{ also: } \underline{\underline{x = 40,}} \qquad \underline{\underline{z = 200}}$$

3. Möglichkeit: Wir ersetzen x und y durch z:

$$z = 5x, \text{ also } x = \frac{z}{5}$$

$$y = 3x, \text{ d. h. } y = 3 \cdot \frac{z}{5}, \text{ und daher:}$$

$$\frac{z}{5} + \frac{3}{5} z + z = 360, \text{ d. h. } \frac{9}{5} z = 360, \qquad \underline{\underline{z = 200}}$$

$$x = \frac{z}{5} = \frac{200}{5}, \; y = \frac{3}{5} z = \frac{3}{5} \cdot 200, \text{ also: } \underline{\underline{x = 40,}} \qquad \underline{\underline{y = 120}}$$

Wir erkennen daraus: Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir die gegebenen Bestimmungsgleichungen miteinander durch Einsetzen verbinden. Die Ergebnisse sind für sämtliche Unbekannte dennoch eindeutig und unverändert. Wir wählen also jeweils den bequemsten Weg.

Die folgende Aufgabe vermittelt uns eine neue Erkenntnis:

Wie heißen die Werte für x und y zu den Gleichungen:

$$\text{I) } 3x + 4y = 18$$
$$\text{II) } 3x - y = 3$$

Lösung: In beiden Gleichungen hat die Unbekannte x den gleichen Faktor 3. Ziehen wir beide Gleichungen voneinander ab (linke Seite II von linker Seite I und entsprechend auch die rechten Seiten voneinander), so erhalten wir:

$$3x - 3x + 4y - (-y) = 18 - 3 \text{ oder}$$
$$5y = 15 \qquad \underline{\underline{y = 3}}$$

Es ergab sich also: Hat eine Unbekannte (x) in zwei Bestimmungsgleichungen denselben Faktor (3), so können wir diese Unbekannte dadurch ausscheiden, daß wir beide Gleichungen voneinander abziehen.

Wir vervielfachen Gleichung II mit -1 und schreiben sie unter Gleichung I. Da jetzt beide x-Glieder verschiedene Vorzeichen haben, so erkennen wir, daß sie aus der Summe beider Gleichungen herausfallen müssen:

$$\begin{array}{rr} \text{I)} & 3x + 4y = 18 \\ -\text{II)} & -3x + y = -3 \\ \hline \text{Summe (I)} + (-\text{II}) & 5y = 15 \end{array} \qquad \underline{\underline{y = 3}}$$

Haben in zwei Bestimmungsgleichungen die Glieder derselben Unbekannten den gleichen Faktor, aber verschiedene Vorzeichen, so lassen sie sich durch Zusammenzählen beider Gleichungen ausscheiden.

Das hier benutzte Verfahren nennt man das Additions- und Subtraktionsverfahren. Haben die aus zwei Gleichungen auszuscheidenden Glieder einer Unbekannten ungleiche Vorzeichen, so wendet man die Addition an, dagegen bei gleichen Vorzeichen die Subtraktion.

Die andere Unbekannte x erhalten wir durch Einsetzen von $y = 3$ in eine der beiden Bestimmungsgleichungen, z. B. in die Gleichung II:

$$3x - y = 3, \text{ also } 3x - 3 = 3 \text{ und} \qquad \underline{\underline{x = 2}}$$

Es gibt also zwei Verfahren für die Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, das Einsetzungsverfahren und das Additions- und Subtraktionsverfahren. In obigem Beispiel sind die Gleichungen II und III mit ihrem einfachen Aufbau $y = 3x$ und $z = 5x$ für das Einsetzungsverfahren besonders günstig. Das Verfahren ist daher in allen gleichgelegenen Fällen zu empfehlen. Für die meisten, weniger bequem gearteten Aufgaben bietet es jedoch keine Vorteile.

Wenn dieselbe Unbekannte (x) in zwei verschiedenen Bestimmungsgleichungen den gleichen Faktor hat, so benutzen wir das Additions- und Subtraktionsverfahren. Auch in den übrigen Fällen, in denen alle Unbekannten in sämtlichen Gleichungen verschiedene Faktoren haben, können, wie die folgende Aufgabe zeigt, die Gleichungen nach Umformung in der gleichen Weise behandelt werden.

Eine weitere Aufgabe: x und y sind aus den folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$\text{I) } 3x + 4y = 23$$
$$\text{II) } 2x - 3y = 4$$

Lösung: Beide Unbekannte x und y haben in beiden Gleichungen verschiedene Faktoren. Wie man sich leicht überzeugen kann, bringt einfaches Abziehen oder Zusammenzählen der Gleichungen keinen Fortschritt.

Wir erweitern deshalb beide Gleichungen so, daß z. B. die y-Glieder $4y$ und $3y$ den gleichen Faktor erhalten; d. h. wir suchen eine Zahl, in der beide Faktoren 4 und 3 von y enthalten sind. Diese Zahl ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, d. h. $4 \cdot 3 = 12$. Um also auf das Glied $12y$ zu kommen, multiplizieren wir die Gleichungen I mit 3 und II mit 4 und erhalten:

$$\begin{array}{rr} \text{I)} & 3 \cdot (3x + 4y) = 3 \cdot 23 \\ \text{II)} & 4 \cdot (2x - 3y) = 4 \cdot 4 \\ \hline \text{I)} & 9x + 12y = 69 \\ \text{II)} & 8x - 12y = 16 \\ \hline \text{I + II)} & 17x = 85 \\ & \underline{\underline{x = 5}} \end{array}$$

In Gleichung I) für x den Wert 5 eingesetzt, ergibt: $3 \cdot 5 + 4y = 23$

$$\underline{\underline{y = 2}}$$

Wir können auch den anderen Weg wählen und die Lösung mit der Beseitigung der x-Glieder beginnen. Da das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu $3x$ und $2x$ gleich $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$ ist, müssen wir Gleichung I mit 2 und Gleichung II mit 3 multiplizieren. Wir erhalten:

$$\begin{array}{rr} \text{I)} & 2 \cdot (3x + 4y) = 2 \cdot 23 \\ \text{II)} & 3 \cdot (2x - 3y) = 3 \cdot 4 \\ \hline \text{I)} & 6x + 8y = 46 \\ \text{II)} & 6x - 9y = 12 \\ \hline \text{(I − II)} & 8y - (-9y) = 34 \\ & 17y = 34, \qquad \text{d. h. } \underline{\underline{y = 2}} \end{array}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in $2x - 3y = 4$ folgt weiter

$$2x - 3 \cdot 2 = 4, \qquad \text{d. h. } \underline{\underline{x = 5}}$$

Beide Wege sind also gleichwertig; wir werden uns daher wieder den jeweils bequemeren aussuchen.

Folgerung: Haben in zwei Gleichungen beide Unbekannten x und y verschiedene Faktoren, so formen wir beide Gleichungen so um, daß die Glieder einer der beiden Unbekannten den gleichen Faktor erhalten. Der gesuchte Faktor ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der betreffenden Glieder beider Gleichungen. Jede Gleichung wird deshalb mit dem ihr dazu fehlenden Faktor vervielfacht. Anschließend können wir die Gleichungen nach dem Additions- und Subtraktionsverfahren lösen.

Das folgende Übungsbeispiel zeigt die sinngemäße Anwendung des soeben Gelernten auf eine Aufgabe mit 3 Unbekannten.

Wie heißen die Ergebnisse zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I)}\quad & 5x + 3y + 2z = 5 \\ \text{II)}\quad & 3x + 2y - 4z = 19 \\ \text{III)}\quad & 7x - 5y + 3z = -12 \end{aligned}$$

Lösung: Wir beginnen mit den Gleichungen I und II. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von $5x$ und $3x$ ist $15x$.

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 3 \cdot (5x + 3y + 2z) = 3 \cdot 5 \\ \text{II)} & 5 \cdot (3x + 2y - 4z) = 5 \cdot 19 \\ \hline \text{I)} & 15x + 9y + 6z = 15 \\ \text{II)} & 15x + 10y - 20z = 95 \\ \hline \text{(II — I)} & y - 26z = 80 \end{array}$$

Wir erhalten somit eine Gleichung mit nur zwei Unbekannten y und z. Genau so verbinden wir die Gleichungen II und III und scheiden aus beiden ebenfalls die gleiche Unbekannte x aus, um eine zweite Gleichung mit den Unbekannten y und z zu erhalten.

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache zu $3x$ und $7x$ ist $21x$.

$$\begin{array}{ll} \text{II)} & 7 \cdot (3x + 2y - 4z) = 7 \cdot 19 \\ \text{III)} & 3 \cdot (7x - 5y + 3z) = 3 \cdot (-12) \\ \hline \text{II)} & 21x + 14y - 28z = 133 \\ \text{III)} & 21x - 15y + 9z = -36 \\ \hline \text{(II — III)} & 29y - 37z = +169 \end{array}$$

Wir schreiben die beiden vereinfachten Gleichungen untereinander:

$$\begin{array}{ll} \text{(II — I)} & y - 26z = 80 \\ \text{(II — III)} & 29y - 37z = 169 \end{array}$$

Wir vervielfachen die obenstehende Gleichung mit dem Faktor 29 des y-Gliedes der untenstehenden Gleichung und erhalten weiter:

$$\begin{array}{ll} \text{(II — I)} & 29y - 754z = 2320 \\ \text{(II — III)} & 29y - 37z = 169 \\ \hline & -717z = 2151 \end{array} \quad \text{oder } z = -\frac{2151}{717} \qquad \underline{\underline{z = -3}}$$

Durch weiteres Einsetzen erhalten wir:

aus (II — I) $y - 26z = 80$

$$\begin{aligned} y - 26 \cdot (-3) &= 80 \\ y + 78 &= 80 \\ \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 2}} \end{aligned}$$

aus (I) $5x + 3y + 2z = 5$

$$\begin{aligned} 5x + 3 \cdot 2 + 2(-3) &= 5 \\ 5x &= 5 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 1}} \end{aligned}$$

52. Beispiel: Wie heißen die Lösungen zu den Gleichungen:

$$\text{I)}\quad 0{,}5\,u + 4\,v = 22{,}5$$
$$\text{II)}\quad 0{,}3\,u - 1{,}5\,v = 3{,}75$$

Lösung: Wir erweitern Gleichung I mit 6, Gleichung II mit 10 und erhalten folgende Rechnung:

$$\text{I)}\quad 6 \cdot (0{,}5\,u + 4\,v) = 6 \cdot 22{,}5$$
$$\text{II)}\quad 10 \cdot (0{,}3\,u - 1{,}5\,v) = 10 \cdot 3{,}75$$
$$\text{I)}\quad 3\,u + 24\,v = 135$$
$$\text{II)}\quad 3\,u - 15\,v = 37{,}5$$
$$(\text{I} - \text{II})\quad 24\,v - (-15\,v) = 97{,}5$$
$$39\,v = 97{,}5$$
$$v = \frac{97{,}5}{39} \qquad \underline{\underline{v = 2{,}5}}$$

Einsetzen dieses Wertes in die Gleichung I ergibt:

$$0{,}5\,u + 4 \cdot 2{,}5 = 22{,}5 \qquad 0{,}5\,u = 22{,}5 - 10 \qquad u = \frac{12{,}5}{0{,}5}$$
$$\underline{\underline{u = 25}}$$

Ergebnis: Die beiden Unbekannten sind $\underline{\underline{u = 25}}$ und $\underline{\underline{v = 2{,}5}}$.

Nicht immer erscheinen die gegebenen Gleichungen so geordnet wie in den bisher behandelten Beispielen. Bisweilen sind die Unbekannten auch mit Brüchen verbunden. Es kommt dann vor allem darauf an, die Rechnung möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten, damit Fehler vermieden werden. Zur Übung wollen wir ein weiteres Beispiel durchrechnen.

53. Beispiel:

$$\tfrac{3}{4}\,x = \tfrac{2}{3}\,y + 35$$
$$\tfrac{1}{6}\,y = 3\,x - 290$$

Wir beseitigen die Nenner, indem wir jede Gleichung mit ihrem Hauptnenner multiplizieren. Für die erste Gleichung ist der Hauptnenner 12; der Hauptnenner der zweiten ist 6. Wir multiplizieren also die erste Gleichung mit 12 und erhalten:

$$9\,x = 8\,y + 420$$

Die zweite Gleichung multiplizieren wir mit 6, dann erhalten wir:

$$y = 18\,x - 1740$$

Nun ordnen wir beide Gleichungen:

$$9\,x - 8\,y = 420$$
$$18\,x - y = 1740$$

Multiplizieren wir nun die zweite Gleichung noch mit -8 und addieren beide Gleichungen, so erhalten wir:

$$9\,x - 144\,x - 8\,y + 8\,y = 420 - 13920$$
$$-135\,x = -13500$$
$$\underline{\underline{x = 100}}$$

Setzen wir den soeben gefundenen Wert in eine Gleichung für y ein, so wird:

$$y = 18 \cdot 100 - 1740$$
$$y = 1800 - 1740$$
$$\underline{\underline{y = 60}}$$

Zeichnerische Lösung von Gleichungen mit zwei Unbekannten

Im vorigen Abschnitt haben wir am Beispiel $y = \lg x$ besprochen, wie man eine Gleichung zwischen x und y bildlich darstellen kann. Auch Gleichungen mit 2 Unbekannten lassen sich in dieser Weise behandeln. Im folgenden soll hierfür mit den Gleichungen:

$$\text{I)}\quad 2x - y = 2 \qquad\qquad \text{II)}\quad 5x + 10y = 25$$

ein Beispiel durchgeführt werden.

Zur Aufstellung der nebenstehenden Wertetafel lösen wir zunächst die Gleichung I nach y auf: $y = 2x - 2$.

Durch Einsetzen mehrerer beliebiger Werte für x (z. B. 0, 1, 2, 3, 4) erhalten wir folgende Tafel:

x	$y = 2x - 2$
0	-2
1	0
2	2
3	4
4	6

Wenn wir die dadurch bestimmten Punkte in ein auf Millimeterpapier gezeichnetes Achsenkreuz eintragen und miteinander verbinden, so erhalten wir Abb. 6 und erkennen, daß sämtliche Punkte auf einer Geraden liegen.

Genau so behandeln wir die Gleichung II und erhalten durch Auflösung nach y:

$$10y = 25 - 5x \quad\text{oder}\quad y = 2{,}5 - 0{,}5x$$

x	$y = 2{,}5 - 0{,}5x$
0	2,5
1	2
2	1,5
3	1
4	0,5

Wie uns Abb. 7 zeigt, liegen die darin eingetragenen Punkte unserer dafür aufgestellten Wertetafel ebenfalls auf einer Geraden.

Beide Gleichungen enthalten die Unbekannten x und y in 1. Potenz, man nennt sie deshalb Gleichungen ersten Grades. Jede der beiden Gleichungen

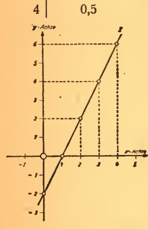


Abb. 6 Darstellung der Gleichung: $y = 2x - 2$

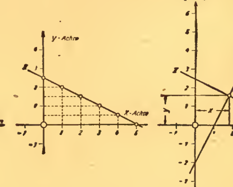


Abb. 7 Darstellung der Gleichung: $5x + 10y = 25$

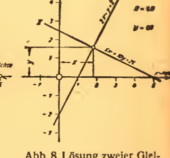


Abb. 8 Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten

lieferte uns eine Gerade. Wir werden später sehen, daß jede Gleichung ersten Grades eine gerade Linie darstellt.

In Abb. 8 sind nun beide Geraden I und II eingetragen. Wir sehen, daß sie sich schneiden. Der Schnittpunkt gehört somit beiden Geraden zugleich an und muß daher mit seinen aus Abb. 8 abgelesenen Werten für $x = 1{,}8$ und $y = 1{,}6$ auch zu beiden Gleichungen passen. Diese Werte müssen also zugleich die Lösungen unserer Gleichungen sein. Wir überzeugen uns noch durch Einsetzen derselben in beide Gleichungen, ob das zutrifft, und erhalten aus $x = 1{,}8$ bzw. $y = 1{,}6$,

zu I) $2x - y = 2$; $2 \cdot 1{,}8 - 1{,}6 = 2$ oder $3{,}6 - 1{,}6 = 2$ $\quad 2 = 2$

zu II) $5x + 10y = 25$; $5 \cdot 1{,}8 + 10 \cdot 1{,}6 = 25$ oder $9 + 16 = 25$; $25 = 25$

Wir können also die gestellte Aufgabe zeichnerisch lösen und merken uns das angewandte Verfahren:

1) Wir lösen beide Gleichungen nach y auf.
2) Wir stellen die Wertetafeln auf. (Bei Gleichungen ersten Grades genügen stets 2 Wertepaare.)
3) Wir zeichnen die Geraden.
4) Der Schnittpunkt der Geraden ergibt die Lösungen für x, y.

Die zeichnerische Lösung wird später als Hilfsmittel zur Auflösung von Gleichungen höheren Grades, d. h. solcher mit Gliedern höherer Potenz von x bzw. y, benutzt werden.

Quadratische Gleichungen

Die Lösung quadratischer Gleichungen ist für uns nicht so neu, wie es im ersten Augenblick erscheinen mag. Wir wissen von früher schon, daß $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ ist. Man kann nun fragen: Welche Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert den Wert 25? Bezeichnen wir die gesuchte Zahl mit x und multiplizieren sie mit sich selbst, so erhalten wir $x \cdot x = x^2$. Dieses Produkt bzw. diese Potenz soll aber **gleich** 25 sein. Wir erhalten also die Gleichung $x^2 = 25$, man nennt sie eine Gleichung **zweiten** Grades oder eine quadratische Gleichung, da die Unbekannte x in der **zweiten Potenz** vorkommt. Wir merken uns:

Jede Gleichung, in der die Unbekannte in der zweiten Potenz vorkommt, ist eine quadratische Gleichung.

Sehen wir uns die Gleichung $x^2 = 25$ noch einmal an, so bemerken wir, daß die Unbekannte x nur in der zweiten Potenz vorkommt. Wir werden später sehen, daß das durchaus nicht immer der Fall ist. Eine derartige Gleichung nennt man **rein quadratisch**. Ihre Lösung bietet für uns nichts Neues. Wir wissen bereits, daß man die Basis einer Potenz erhält, wenn man die entsprechende Wurzel zieht. Es ist nämlich $\sqrt[n]{p^n} = p$. Aus der

Potenz x^2 erhalten wir also die gesuchte Basis x, wenn wir die zweite Wurzel ziehen. Weiter wissen wir, daß eine Gleichung nur dann richtig bleibt, wenn ein geplanter Rechenvorgang auf beiden Seiten durchgeführt wird. Wenn also die Gleichung $x^2 = 25$ richtig bleiben soll, muß die zweite Wurzel auf beiden Seiten gezogen werden, und wir erhalten:

$$\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{25}$$

Hier sind die beiden Vorzeichen zu beachten. Beim Ziehen der zweiten Wurzel erhält man also zwei Ergebnisse, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden:

$$\underline{\underline{x = \pm 5}}$$

Beide Werte von x sind richtige Lösungen, da sowohl $(+5)^2$ als auch $(-5)^2$ den Wert 25 ergibt. Man sagt auch: die gegebene Gleichung hat zwei Wurzeln. Ganz allgemein gilt:

1) Jede quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln.
2) Die beiden Wurzeln einer reinquadratischen Gleichung unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

Das Wurzelziehen kann auf vier verschiedene Arten erfolgen:

1) mit Hilfe von Tabellen,
2) mit Hilfe des Rechenschiebers,
3) durch logarithmische Rechnung,
4) durch unmittelbares Rechnen.

Da in der Technik fast ausschließlich die ersten drei Arten gebräuchlich sind, sollen bei den folgenden Beispielen diese Rechnungsarten zur Wiederholung geübt werden.

54. Beispiel: $x^2 - 4500 = 0$
$x^2 = 4500$
$x = \pm \sqrt{4500}$

Wir finden in den „Technischen Tabellen" auf S. 6 für $n = 45{,}0$ den Wert 6,708, so daß sich ergibt:

$$\underline{\underline{x = \pm 67{,}08}}$$

Es wird besonders darauf hingewiesen, daß es falsch ist, etwa auf S. 2 bei 4,5 zu suchen und den Wert 21,21 als Ergebnis zu schreiben. Wenn man nämlich von 4500 von rechts nach links je zwei Stellen abzählt, erhält man 45 und nicht 4,5.

55. Beispiel: $2{,}5\,x^2 - 0{,}05 = 0$
$2{,}5\,x^2 = 0{,}05$
$x^2 = \frac{0{,}05}{2{,}5}$

$x^2 = 0{,}02$
$x = \pm \sqrt{0{,}02}$

Auf dem Rechenschieber ist in der **ersten** Skala der oberen Stabskala mit dem Mittelstrich des Läufers die 2 einzustellen. Auf der unteren Stabskala lesen wir ab 1,414. Also:

$$\underline{\underline{x = \pm 0{,}1414}}$$

56. Beispiel: $0{,}00378\,x^2 - 32{,}5 = 0$

$$0{,}00378\,x^2 = 32{,}5 \qquad x^2 = \frac{32{,}5}{0{,}00378}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{32{,}5}{0{,}00378}}$$

Diese Rechnung wollen wir logarithmisch ausführen (s. „Technische Tabellen", S. 16).

$$\lg 32{,}5 = 1{,}5119$$
$$\lg 0{,}00378 = 0{,}5775 - 3$$
$$\lg \frac{32{,}5}{0{,}00378} = 3{,}9344$$

$$\lg x = \tfrac{1}{2} \lg \frac{32{,}5}{0{,}00378} = 1{,}9672$$

$$\underline{\underline{x = \pm 92{,}73}}$$

Wir wollen nun noch einen besonderen Fall betrachten. Es liege die reinquadratische Gleichung $x^2 + 0{,}0049 = 0$ vor. Wir rechnen zunächst wie bisher:

$$x^2 = -0{,}0049$$
$$x = \pm\sqrt{-0{,}0049}$$

Weder der Wert $+0{,}07$ noch der Wert $-0{,}07$ ist richtig, da sowohl $(+0{,}07)^2$ als auch $(-0{,}07)^2$ das Ergebnis $+0{,}0049$ haben. Es gibt also in unserer Zahlenreihe **keinen** Wert, der, mit sich selbst multipliziert, das Ergebnis $-0{,}0049$ hat. Wir schreiben daher:

$$x = \sqrt{-0{,}0049} = \sqrt{0{,}0049 \cdot (-1)} = \sqrt{0{,}0049} \cdot \sqrt{-1}$$

Für $\sqrt{-1}$ ist zur Abkürzung der Buchstabe i eingeführt worden, so daß die Gleichung besteht[1]:

$$i = \sqrt{-1}$$
$$\underline{\underline{i^2 = -1}}$$

i ist die Einheit der „**imaginären Zahlen**", d. h. einer neuen Zahlenreihe im Gegensatz zur normalen oder „**reellen Zahlenreihe**". Multipliziert man also eine imaginäre Zahl mit sich selbst, so erhält man eine **negative** Zahl. Die imaginären Zahlen gehören einer gedachten Reihe an, die auf besonderen Gebieten der Technik große Bedeutung gewonnen haben.

Setzen wir nun für $\sqrt{-1}$ den Abkürzungsbuchstaben i ein, so wird:

$$x = \pm\sqrt{0{,}0049}\; i$$
$$\underline{\underline{x = \pm 0{,}07\, i}}$$

Auch hier erhalten wir für x zwei Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

[1] In der Elektrotecknik wird statt „i" der Buchstabe „j" benutzt. $i = j = \sqrt{-1}$.

57. **Beispiel:** $\frac{5}{4}x^2 + 0{,}634 = 0$

$$\frac{5}{4}x^2 = -0{,}634$$

$$x^2 = -0{,}634 \cdot \frac{4}{5}$$

$$x = \pm\sqrt{-0{,}634 \cdot \frac{4}{5}}$$

$$x = \pm\sqrt{0{,}634 \cdot \frac{4}{5}}\,i$$

$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}634 & = 0{,}8021 - 1 \\ \lg 4 & = 0{,}6021 \\ \hline \lg 4 \cdot 0{,}634 & = 0{,}4042 \\ \lg 5 & = 0{,}6990 \\ \hline \lg 0{,}634 \cdot \frac{4}{5} & = 0{,}7052 - 1 \end{array}$$

Damit die Kennziffer nach dem Teilen durch 2 keine gebrochene Zahl wird, schreiben wir:

$$\lg\ 0{,}634 \cdot \frac{4}{5} = 1{,}7052 - 2$$

$$\lg\sqrt{0{,}634 \cdot \frac{4}{5}} = 0{,}8526 - 1$$

$$\sqrt{0{,}634 \cdot \frac{4}{5}} = 0{,}7122$$

$$\underline{\underline{x = \pm\, 0{,}7122\, i}}$$

58. **Beispiel:** $0{,}5\,x^2 + 0{,}98 = 0$

$$0{,}5\,x^2 = -0{,}98$$

$$x^2 = -\frac{0{,}98}{0{,}5}$$

$$x^2 = -1{,}96$$

$$x = \pm\sqrt{-1{,}96}$$

$$\underline{\underline{x = \pm\, 1{,}4\, i}}$$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß jede reinquadratische Gleichung entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Wurzeln hat.

Nicht immer wird in quadratischen Gleichungen die Unbekannte nur in der zweiten Potenz vorkommen. Wir stellen uns folgende Aufgabe:

Addiert man zu dem Quadrat einer Zahl ihr Sechsfaches, so erhält man 280. Wie groß ist die Zahl?

Bezeichnet man die gesuchte Zahl mit x, so ist ihr Quadrat x^2. Das Sechsfache der Zahl ist $6\,x$, so daß die Summe $x^2 + 6\,x$ beträgt. Da die Summe gleich 280 sein soll, so lautet die Bestimmungsgleichung für x: $x^2 + 6\,x = 280$.

In dieser Gleichung kommt die Unbekannte nicht nur in der zweiten, sondern auch noch in der ersten Potenz vor. Derartige Gleichungen heißen gemischt quadratisch. Zur Lösung verwandelt man die linke Seite der Gleichung in das Quadrat einer Summe bzw. einer Differenz nach den uns bekannten Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 \text{ bzw. } (a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$$

a^2 ersetzen wir durch x^2, so daß a gleich x ist. Für $2\,ab$ haben wir dementsprechend $6\,x$ zu setzen, wodurch sich zwangsläufig $2\,b = 6$ ergibt; also wird $b = 3$ und $b^2 = 9$.

Addieren wir also auf jeder Seite der Gleichung die Zahl 9, so erhalten wir auf der linken Seite das Quadrat der Summe $x + 3$. Die Zahl 9 nennt man die quadratische Ergänzung.

$$x^2 + 6x + 9 = 280 + 9$$
$$(x + 3)^2 = 289$$

Jetzt können wir die Wurzel ziehen und erhalten:

$$x + 3 = \pm\sqrt{289}$$
$$x + 3 = \pm 17$$

Sowohl der Wert $+17$ als auch der Wert -17 liefert uns eine Lösung der gegebenen Gleichung.

1) $x_1 = +17 - 3$
$\underline{\underline{x_1 = 14}}$

2) $x_2 = -17 - 3$
$\underline{\underline{x_2 = -20}}$

Wir machen für beide Werte die Probe, um sicher zu sein, daß wir richtig gerechnet haben.

$x_1 = 14$ ergibt: $14^2 + 6 \cdot 14 = 280$
$196 + 84 = 280$
$280 = 280$

$x_2 = -20$ ergibt: $(-20)^2 + 6 \cdot (-20) = 280$
$400 - 120 = 280$
$280 = 280$

Auch hier erhalten wir also zwei Wurzeln.

59. Beispiel: $x^2 - 0{,}4x = 1{,}17$

Wir suchen zunächst die quadratische Ergänzung. Das Glied $0{,}4x$ entspricht dem $2ab$. Da a dem x entspricht, muß $0{,}4$ gleich $2b$ und damit $b = 0{,}2$ sein. Die quadratische Ergänzung ist also $0{,}2^2 = 0{,}04$. Somit:

$$x^2 - 0{,}4x + 0{,}04 = 1{,}17 + 0{,}04 \qquad x - 0{,}2 = \pm\sqrt{1{,}21}$$
$$(x - 0{,}2)^2 = 1{,}21 \qquad x - 0{,}2 = \pm 1{,}1$$

Wir bekommen: 1) $x_1 = 1{,}1 + 0{,}2$
$\underline{\underline{x_1 = 1{,}3}}$

2) $x_2 = -1{,}1 + 0{,}2$
$\underline{\underline{x_2 = -0{,}9}}$

Probe:

$x_1 = 1{,}3$ ergibt:
$1{,}3^2 - 0{,}4 \cdot 1{,}3 = 1{,}17$
$1{,}69 - 0{,}52 = 1{,}17$
$1{,}17 = 1{,}17$

$x_2 = -0{,}9$ ergibt:
$(-0{,}9)^2 - 0{,}4 \cdot (-0{,}9) = 1{,}17$
$0{,}81 + 0{,}36 = 1{,}17$
$1{,}17 = 1{,}17$

Bisher haben wir nur solche gemischtquadratische Gleichungen gerechnet, bei denen die zweite Potenz der Unbekannten keinen besonderen Faktor hatte. Liegt eine Gleichung in der Form $-3x^2 + 48x = -315$ vor, so ist zunächst x^2 vom Faktor -3 zu befreien.

Man bringt die quadratische Gleichung auf die „Normalform".

Das erreichen wir, wenn wir die Gleichung durch -3 dividieren.

$$-3x^2 + 48x = -315 \,|: -3$$
$$x^2 - 16x = 105$$

Nun suchen wir wie vorher die quadratische Ergänzung. Sie beträgt im vorliegenden Fall

$\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 8^2 = 64$. Somit erhält man:

$$x^2 - 16x + 64 = 105 + 64$$
$$(x - 8)^2 = 169$$
$$x - 8 = \pm 13$$

und es wird:

1) $x_1 = +13 + 8$ 2) $x_2 = -13 + 8$

$\mathbf{x_1 = 21}$ $\mathbf{x_2 = -5}$

Probe: $x_1 = 21$ ergibt:

$$-3 \cdot 21^2 + 48 \cdot 21 = -315$$
$$-1323 + 1008 = -315$$
$$-315 = -315$$

$x_2 = -5$ ergibt:

$$-3 \cdot (-5)^2 + 48 \cdot (-5) = -315$$
$$-75 - 240 = -315$$
$$-315 = -315$$

60. Beispiel: $12x^2 + 6x = 6$

Wir dividieren die Gleichung zunächst durch 12, um sie auf die Normalform zu bringen.

$$12x^2 + 6x = 6 \mid : 12$$
$$x^2 + 0{,}5x = 0{,}5$$

Die quadratische Ergänzung ist $\left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 = 0{,}25^2 = 0{,}0625$. Man erhält:

$$x^2 + 0{,}5x + 0{,}0625 = 0{,}5 + 0{,}0625$$
$$(x + 0{,}25)^2 = 0{,}5625$$
$$x + 0{,}25 = \pm 0{,}75$$

Dies ergibt:

1) $x_1 = +0{,}75 - 0{,}25$ 2) $x_2 = -0{,}75 - 0{,}25$

$\mathbf{x_1 = 0{,}5}$ $\mathbf{x_2 = -1}$

Probe: $x_1 = 0{,}5$ ergibt:

$$12 \cdot (0{,}5)^2 + 6 \cdot 0{,}5 = 6$$
$$12 \cdot 0{,}25 + 3{,}0 = 6$$
$$3{,}0 + 3{,}0 = 6$$
$$6 = 6$$

$x_2 = -1$ ergibt:

$$12 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = 6$$
$$12 - 6 = 6$$
$$6 = 6$$

Wir wollen jetzt noch einen besonderen Fall kennenlernen. Es liege die Gleichung $4x^2 - 64x = -356$ vor. Zunächst bringen wir die Gleichung dadurch auf die Normalform, daß wir durch 4 dividieren.

$$4x^2 - 64x = -356 \mid : 4$$

Normalform: $$x^2 - 16x = -89$$

Mit der quadratischen Ergänzung $\left(\frac{16}{2}\right)^2 = 8^2 = 64$ erhält man:

$$x^2 - 16x + 64 = -89 + 64$$
$$(x-8)^2 = -25$$
$$x - 8 = \pm\sqrt{-25}$$
$$x - 8 = \pm 5i$$

somit 1) $x_1 = 8 + 5i$

2) $x_2 = 8 - 5i$

Probe:
$$4(8 \pm 5i)^2 - 64(8 \pm 5i) = -356$$
$$4(64 \pm 80i - 25) - 512 \mp 320i = -356$$
$$256 \pm 320i - 100 - 512 \mp 320i = -356$$
$$-356 = -356$$

Die Ergebnisse sind eine Summe bzw. eine Differenz aus einer reellen und einer imaginären Zahl. Derartige zusammengesetzte Größen heißen „komplexe Zahlen".

61. Beispiel: $0{,}3x^2 - 0{,}3x + 0{,}087 = 0 \mid : 0{,}3$

Normalform: $$x^2 - x + 0{,}29 = 0$$
$$x^2 - x = -0{,}29$$

Mit der quadratischen Ergänzung $(\frac{1}{2})^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25$ erhält man:

$$x^2 - x + (0{,}5)^2 = -0{,}29 + 0{,}25$$
$$(x - 0{,}5)^2 = -0{,}04$$
$$x - 0{,}5 = \pm\sqrt{-0{,}04}$$
$$x - 0{,}5 = \pm 0{,}2i$$
$$x_1 = 0{,}5 + 0{,}2i$$
$$x_2 = 0{,}5 - 0{,}2i$$

Probe:
$$0{,}3(0{,}5 \pm 0{,}2i)^2 - 0{,}3(0{,}5 \pm 0{,}2i) + 0{,}087 = 0$$
$$0{,}3(0{,}25 \pm 0{,}2i - 0{,}04) - 0{,}3(0{,}5 \pm 0{,}2i) + 0{,}087 = 0$$
$$0{,}075 \pm 0{,}06i - 0{,}012 - 0{,}15 \mp 0{,}06i + 0{,}087 = 0$$
$$0 = 0$$

Wir fassen noch einmal den Lösungsgang zusammen:

1) Man bringt die gegebene Gleichung auf die Normalform. Zu diesem Zweck dividiert man die Gleichung durch den Faktor von x^2.
2) Man bestimmt die quadratische Ergänzung und addiert sie auf beiden Seiten der Gleichung in Normalform.
3) Man verwandelt die linke Seite der Gleichung in das Quadrat einer Summe bzw. einer Differenz.
4) Man zieht auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel.

5) Man berechnet die beiden Werte von x, indem man einmal das positive Vorzeichen, das andere Mal das negative Vorzeichen der Wurzel benutzt.

Eine sehr elegante Lösung erhält man, wenn es gelingt, die gegebene Gleichung in eine Produktengleichung zu verwandeln. Ist beispielsweise die Gleichung $x^2 - 8x + 15 = 0$ gegeben, so kann man bei einiger Übung erkennen, daß die linke Seite der Gleichung in ein Produkt verwandelt werden kann. Es ist nämlich:

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 5) \cdot (x - 3), \text{ also}$$
$$(x - 5) \cdot (x - 3) = 0$$

Ein Produkt kann aber nur gleich Null sein, wenn entweder der eine oder der andere Faktor zu Null wird. Es muß also

$$\text{entweder } x - 5 = 0$$
$$\text{oder } x - 3 = 0$$

sein, und man erhält als Lösungen: $\underline{\underline{x_1 = 5}}$ und $\underline{\underline{x_2 = 3}}$.

Wir lösen die Gleichung noch mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

$$x^2 - 8x = -15$$

Mit der quadratischen Ergänzung $4^2 = 16$ erhält man:

$$x^2 - 8x = -15$$
$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16$$
$$(x - 4)^2 = 1$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{1}$$

$$x - 4 = \pm 1$$
$$\underline{\underline{x_1 = 5}}$$
$$\underline{\underline{x_2 = 3}}$$

62. Beispiel:

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$
$$(x - 4)(x + 8) = 0$$

entweder: $x - 4 = 0$, $\underline{\underline{x_1 = 4}}$ oder: $x + 8 = 0$, $\underline{\underline{x_2 = -8}}$

Hat man häufig quadratische Gleichungen zu lösen, so ist es zweckmäßig, eine fertige Formel zu verwenden. Wir wollen von der allgemeinen Form einer quadratischen Gleichung ausgehen und die Gebrauchsformel ableiten. Gegeben sei die Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Wir bringen diese Gleichung auf die Normalform, indem wir durch den Faktor a von x^2 dividieren. Wir erhalten:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Setzt man $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so erhalten wir die **Normalform** einer quadratischen Gleichung in üblicher Fassung:

$$x^2 + px + q = 0$$

Nun lösen wir die Gleichung genau so, als ob wir Zahlenwerte hätten und bringen zunächst das von x freie Glied auf die rechte Seite:

$$\underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{px}_{2ba} = -q$$

Jetzt bestimmen wir die quadratische Ergänzung, die wir auf beiden Seiten der Gleichung addieren. Da der Wert p dem $2b$ entspricht, ist $b = \frac{p}{2}$ und die quadratische Ergänzung $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Diese Gleichung lernen wir auswendig!

An einigen Beispielen wollen wir den richtigen Gebrauch der Formel üben.

63. Beispiel:

$$\frac{2}{9}x^2 + \frac{7}{30}x = \frac{13}{10} \;\Big|\; \cdot \frac{9}{2}$$

Normalform:

$$x^2 + \frac{7}{30} \cdot \frac{9}{2}x - \frac{13}{10} \cdot \frac{9}{2} = 0$$

$$x^2 + \underbrace{\frac{21}{20}}_{p}x - \underbrace{\frac{117}{20}}_{q} = 0$$

Durch Vergleich mit der Normalform erkennen wir, daß:

$$p = +\frac{21}{20} \text{ und } q = -\frac{117}{20}$$

Somit wird:

$$x_{1,2} = -\frac{21}{40} \pm \sqrt{\left(\frac{21}{40}\right)^2 + \frac{117}{20}}$$

Der Hauptnenner unter der Wurzel ist $40 \cdot 40 = 1600$. Da $1600 = 20 \cdot 80$ ist, muß der zweite Summand mit 80 erweitert werden.

$$(117 \cdot 80 = 9360)$$

$$x_{1;2} = -\frac{21}{40} \pm \sqrt{\frac{441 + 9360}{1600}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{9801}{1600}}$$

$$\pm \frac{99}{40}$$

$$x_1 = -\frac{21}{40} + \frac{99}{40} \qquad x_2 = -\frac{21}{40} - \frac{99}{40}$$

$$x_1 = \frac{78}{40} \qquad x_2 = -\frac{120}{40}$$

$$\underline{\underline{x_2 = \frac{39}{20}}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -3}}$$

64. Beispiel:

$$\frac{2}{5} x^2 - 4x = \frac{598}{5}$$

Normalform:

$$x^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} x = \frac{598}{5} \cdot \frac{5}{2}$$

$$x^2 \underbrace{- 10}_{p} x \underbrace{- 299}_{q} = 0$$

$$[p = -10;\ q = -299]$$

$$x_{1;2} = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 299}$$

$$= \frac{10}{2} \pm \sqrt{25 + 299} = 5 \pm \sqrt{324}$$

$$x_1 = 5 + 18 \qquad x_2 = 5 - 18$$

$$\underline{\underline{x_1 = 23}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -13}}$$

Mitunter kommt es auch vor, daß in quadratischen Gleichungen das von x freie Glied fehlt. In diesem Falle ist die Lösung besonders einfach. Gegeben sei die Gleichung $x^2 - 5x = 0$. Wir erkennen sofort, daß auf der linken Seite der Wert x ausgeklammert werden kann, so daß man ein Produkt erhält. Es ergibt sich:

$$x(x - 5) = 0$$

Ein Produkt kann aber nur gleich Null sein, wenn entweder der eine oder der andere Faktor gleich Null ist. Also:

entweder: $\underline{\underline{x_1 = 0}}$

oder: $x - 5 = 0$

$$\underline{\underline{x_2 = 5}}$$

Geometrie

Proportionen

Wir pflegen die Neigung einer Straße durch das Verhältnis zwischen Höhen- und Längenunterschied zweier Punkte auf der Achse der Straße auszudrücken. Hierbei ist stets der waagerechte Längenunterschied gemeint (s. Abb. 9). Wir sprechen z. B. von einer Straßenneigung von 1 : 30

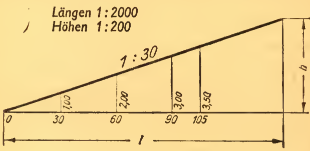


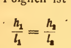
Abb. 9 Neigung einer Geraden

(eins zu dreißig). Das bedeutet, daß auf 30 m waagerecht gemessener Länge die Straße um 1,00 m ansteigt oder fällt. Unter Beibehaltung derselben Neigung steigt oder fällt sie auf 60 m um 2,00 m, auf 90 m um 3,00 m, auf 105 m um 3,50 m usw. Der Wert des Verhältnisses zwischen Höhen- und Längenunterschied bleibt immer derselbe; denn es ist z. B. $\frac{2}{60} = \frac{3}{90} = \frac{3{,}5}{105} = \frac{1}{30}$. Bezeichnen h den Höhenunterschied und l den Längenunterschied zwischen zwei Punkten, so besteht hier das Verhältnis (Abb. 9):

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{30} \text{ oder } h : l = 1 : 30$$

Ein solches Zahlenverhältnis nennt man, wie aus der Algebra bekannt, eine Proportion. h ist die erste und l die zweite Proportionale. Nach Abb. 10 ist aber auch

$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h}{l}$ und $\frac{h_2}{l_2} = \frac{h}{l}$. Die rechten Seiten der beiden Gleichungen sind einander gleich. Folglich ist auch:



$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2}$$

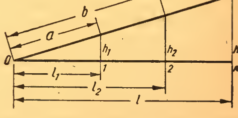


Abb. 10 Geometrische Deutung einer Proportion

In dieser Proportion ist h_2 die dritte und l_2 die vierte Proportionale. Wir können nun den Ausdruck $\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2}$ nach bekannten algebraischen Regeln umformen. Multiplizieren wir z. B. jede Seite der Gleichung mit $\frac{l_1}{h_2}$, so bleibt die Gleichung richtig. Wir erhalten dann:

$$\frac{h_1}{l_1} \cdot \frac{l_1}{h_2} = \frac{h_2}{l_2} \cdot \frac{l_1}{h_2}$$

oder

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

Wir werten dieses nach algebraischen Regeln gefundene Ergebnis geometrisch aus. Abb. 10, aus der die Proportion gefunden wurde, stellt zwei von *0* ausgehende Strahlen dar. Diese werden von zwei durch die Punkte *1* und *2* gehende Parallelen geschnitten. Die Parallelen, deren Längen h_1 und h_2 betragen, stehen auf dem Strahl $0 - n$ senkrecht. l_1 und l_2 sind die Abstände der Parallelenschnittpunkte vom Scheitelpunkt *0* auf dem Strahl, auf dem die Parallelen senkrecht stehen. Die Proportion $\frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$ besagt also:

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, die senkrecht zu einem der beiden Strahlen verlaufen, so verhalten sich die Abschnitte der Parallelen zwischen den Schnittpunkten mit den Strahlen zueinander wie ihre Abstände vom Scheitelpunkt.

Es verhält sich aber auch:

$$\frac{a}{b} = \frac{l_1}{l_2}$$

und damit:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$$

Die Abschnitte der auf einem der beiden Strahlen senkrecht stehenden Parallelen verhalten sich also auch wie die vom Scheitelpunkt aus gerechneten Abschnitte auf dem Strahl, auf dem die Parallelen nicht senkrecht stehen. Der Beweis hierzu läßt sich leicht erbringen.

Zu diesem Zwecke tragen wir, wie es in Abb. 11 mit sechs Teilen von der Größe *a* durchgeführt ist, auf einer Geraden von einem Punkte aus mehrere beliebig große, aber unter sich gleiche Teile ab. Es entstehen so in Abb. 11 die Teilpunkte *0, 1, 2, 3, 4, 5* und *6*. Von *0* aus ziehen wir unter beliebig großem Winkel α einen Strahl nach rechts oben. Parallelen durch die Teilpunkte *1, 2, 3, 4, 5* und *6* unter einem beliebigen Winkel β schneiden den in *0* angesetzten Strahl in den Punkten *1', 2', 3', 4', 5'* und *6'*. Ziehen wir durch *1'* bis *5'* die Parallelen zu $0 - 6$, so erhalten wir die 6 kongruenten Dreiecke $01'1$, $1'2'f_2$, $2'3'f_3$, $3'4'f_4$, usw. Sie sind kongruent, weil sie in den Seiten 01, $1'f_2$ bis $5'f_6$ und den diesen Seiten

anliegenden Winkeln α und γ übereinstimmen. Folglich sind als entsprechende Stücke in kongruenten Dreiecken auch die Stücke $01'$, $1'2'$, $2'3'$, $3'4'$, $4'5'$ und $5'6'$, in Abb. 11 mit b bezeichnet, einander gleich.

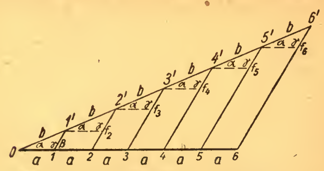


Abb. 11 Zwei Geraden, geschnitten von Parallelen

Die vom Punkte 0 ausgehenden Geraden 0—6 und 0—$6'$ sind Strahlen, die unter beliebigem Winkel von 6 Parallelen in gleichem Abstand geschnitten werden. Wir können nun für jeden Strahl eine Proportion aufstellen.

$$\frac{\text{Strecke } 0-2}{\text{Strecke } 0-5} = \frac{2a}{5a} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\text{Strecke } 0-2'}{\text{Strecke } 0-5'} = \frac{2b}{5b} = \frac{2}{5}$$

Der Wert der beiden Proportionen ist derselbe. Daraus folgt:

$$\frac{\text{Strecke } 0-2}{\text{Strecke } 0-5} = \frac{\text{Strecke } 0-2'}{\text{Strecke } 0-5'}$$

Es ist aber auch $\frac{\text{Strecke } 1-3}{\text{Strecke } 3-6} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$

und $\frac{\text{Strecke } 1'-3'}{\text{Strecke } 3'-6'} = \frac{2b}{3b} = \frac{2}{3}$

und damit $\frac{\text{Strecke } 1-3}{\text{Strecke } 3-6} = \frac{\text{Strecke } 1'-3'}{\text{Strecke } 3'-6'}$

Wir fassen das Ergebnis dieses Beweises in den Satz zusammen: **Werden zwei sich schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte der einen Geraden zueinander wie die entsprechenden Abschnitte der anderen.**

Demzufolge ergeben sich aus Abb. 10 folgende Proportionen:

$$\frac{a}{b} = \frac{l_1}{l_2} \qquad \frac{b-a}{b} = \frac{l_2-l_1}{l_2} \qquad \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{a}{b}$$

Bei der Aufstellung der Proportion $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$ setzen wir voraus, daß die parallelen Stücke h_1 und h_2 auf einem der beiden Strahlen senkrecht stehen. Die Proportion gilt aber auch dann, wenn dies nicht der Fall ist.

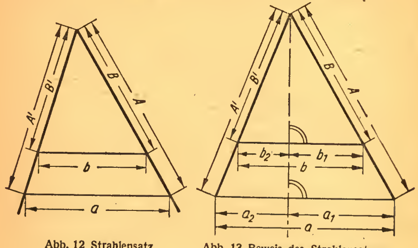


Abb. 12 Strahlensatz

Abb. 13 Beweis des Strahlensatzes

In Abb. 12 ist z. B.

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

Die Richtigkeit läßt sich mit Hilfe der Abb. 13 beweisen. Es ist dort:

$$a = a_1 + a_2 \qquad b = b_1 + b_2$$

Ferner

1) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{A}{B}$ 3) $\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}$

2) $\frac{a_2}{b_2} = \frac{A'}{B'}$ 4) $\frac{a_2}{b_2} = \frac{A}{B} = \frac{a_1}{b_1}$

Wir zählen nun zu jeder Seite der Gleichung 1) den Wert von $\frac{a_2}{b_1}$ zu, ohne den Wert der Gleichung dadurch zu ändern. Wir erhalten dann:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1} = \frac{A}{B} + \frac{a_2}{b_1}$$

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1} = \frac{A}{B} + \frac{a_2}{b_1}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{A}{B} \cdot b_1 + a_2$$

Aus Gleichung 4) erhalten wir:

$$a_2 = \frac{A}{B} \cdot b_2$$

Es ist also:

$$a_1 + a_2 = \frac{A}{B} \cdot b_1 + \frac{A}{B} \cdot b_2 = \frac{A}{B} (b_1 + b_2)$$

oder

$$\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{A}{B}$$

Die beiden letzten, durch algebraische Umstellungen bewiesenen Tatsachen sind in der Geometrie unter dem Namen „Strahlensatz" bekannt. Der erste Teil des Strahlensatzes lautet:

Werden zwei sich schneidende Geraden (Strahlen) von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte der Geraden zueinander wie die entsprechenden Abschnitte der andern.

Der zweite Teil lautet:

Werden zwei sich schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen zueinander wie die zugehörigen, vom Schnittpunkt der Geraden aus gerechneten Abschnitte der Geraden.

Die beiden Teile des Strahlensatzes gelten auch dann, wenn die beiden Parallelen beiderseits des Schnittpunktes der beiden Geraden liegen. Gemäß Abb. 14 ist dann:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{0A}{0D} = \frac{0B}{0C}$$

$$\frac{0D}{0A} = \frac{0C}{0B}$$

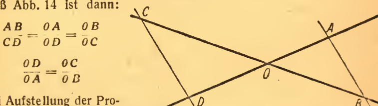


Abb. 14 Strahlensatz (Parallelen beiderseits des Schnittpunkts der Geraden)

Bei Aufstellung der Proportionen ist darauf zu achten, daß die Vergleichsabschnitte nur auf einem Strahl liegen.

Wir betrachten nun einige Beispiele aus der Praxis.

65. Beispiel: Die Strecke AB in Abb. 15 ist ohne Maßstab und ohne Probieren zeichnerisch in sechs gleiche Teile zu teilen.

Lösung: Wir ziehen vom Punkte A aus unter beliebigem Winkel einen Strahl, tragen auf ihm von A aus mit dem Zirkel sechs beliebig große, aber unter sich gleiche Teile hintereinander ab, verbinden den Endpunkt der Teilung mit B und ziehen zu dieser Geraden die Parallelen durch die Zwischenteilpunkte. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Geraden AB teilen diese in sechs gleiche Teile, denn es verhält sich $A1 : A2 : A3 : A4 : A5 : A6 =$

$A\,1' : A\,2' : A\,3' : A\,4 : A\,5' : AB$ und $A\,1' = 1'2' = 2'3'$ usw. (vgl. Strahlensatz 1. Teil).

66. Beispiel: Für den in Abb. 16 gezeigten Dachstuhl ist die Länge der Zange Z zu berechnen.

Lösung: Die Außenkanten der Sparren stellen zwei vom First ausgehende Strahlen dar, die von zwei Parallelen im Abstand von der Spitze von 6,00 m und

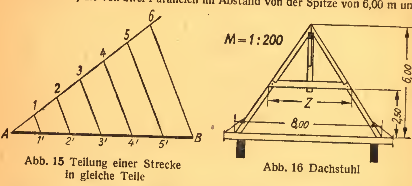


Abb. 15 Teilung einer Strecke in gleiche Teile

Abb. 16 Dachstuhl

6,00 — 2,50 = 3,50 m geschnitten werden. Die Länge der im Abstand von 6,00 gezogenen Parallelen ist mit 8,00 m bekannt. Nach dem Strahlensatz verhält sich:

$$\frac{Z}{8{,}00} = \frac{3{,}50}{6{,}00}$$

$$Z = \frac{8 \cdot 3{,}50}{6{,}00} = \frac{28}{6} = 4{,}67 \text{ m}$$

Die Länge der Zange beträgt **4,67 m.**

67. Beispiel: Nach Abb. 17 wird die Höhe H eines Schornsteins mittels eines Theodoliten T aus dessen waagerechter Entfernung l_2 und seiner Eigenhöhe h_i bestimmt durch Ablesung h_1 auf einer im waagerechten Abstand l_1 vom Theodoliten in die Visierlinie gestellten Meßplatte M. Dann ist:

$$(h_1 - h_i) : (H - h_i) = l_1 : l_2 \text{ oder}$$

$$H = (h_1 - h_i) \cdot \frac{l_2}{l_1} + h_i$$

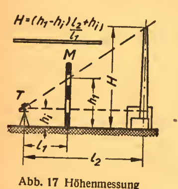


Abb. 17 Höhenmessung

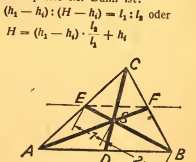


Abb. 18 Seitenhalbierenden im Dreieck

68. **Beispiel:** Im Dreieck ABC der Abb. 18 schneiden sich die Seitenhalbierenden AF und BE in S. Da nun

$$CE:AE = CF:BF = 1:1 \text{ ist,}$$

sind EF und AB parallel. Außerdem folgt aus:

$$EF:AB = CE:CA = 1:2$$
$$EF = \frac{AB}{2}$$

Die Strahlen BE und AF ergeben daher:

$$EF:AB = 1:2 = ES:SB$$

Die Seitenhalbierende EB wird also im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Da der gleiche Beweis für die beiden anderen Seitenhalbierenden in der gleichen Weise geführt wird, ergibt sich allgemein:

Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkte (dem Schwerpunkt S) und teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2:1 (vom Eckpunkt gerechnet!).

Ähnliche Dreiecke

Die beiden Parallelen AB und $A'B'$ der Abb. 19 bestimmen auf den Geraden $A'C$ und $B'C$ die beiden Dreiecke $A'B'C$ und ABC, deren entsprechende Winkel untereinander gleich sind. Laut Strahlensatz ist:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C}$$

Die Verhältnisse entsprechender Seiten beider Dreiecke sind also gleich groß. Man nennt solche Dreiecke „ähnliche Dreiecke" und schreibt zwischen beide Bezeichnungen ABC und $A'B'C$ das Ähnlichkeitszeichen $\sim$, also

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$$

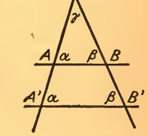


Abb. 19 Ähnliche Dreiecke

Wie die Kongruenz von Dreiecken aus der Erfüllung bestimmter Voraussetzungen gefolgert wird, so ergeben sich auch sinngemäß die folgenden „Ähnlichkeitssätze":

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

1) die Verhältnisse der drei Seiten gleich groß sind,
2) die Verhältnisse von zwei Seiten und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich groß sind,
3) die Verhältnisse von zwei Seiten und die den größeren Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind und
4) die Winkel gleich groß sind.

Die mittlere Proportionale

Erfüllen 3 Strecken a, b und c die Bedingung

$$a : b = b : c$$

so nennt man b die „mittlere Proportionale“ zu a und c. Durch Umformung erhalten wir:

$$a \cdot c = b^2 \text{ oder } b = \sqrt{a \cdot c}$$

Die mittlere Proportionale zu zwei gegegebenen Größen ist also die Wurzel aus dem Produkt der beiden Größen.

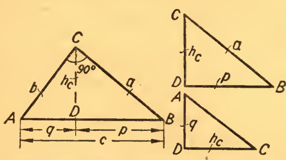


Abb. 20 Höhe im rechtwinkligen Dreieck als mittlere Proportionale

Die aus der Zerlegung des rechtwinkligen Dreiecks ABC der Abb. 20 durch die Höhe h_c auf die (dem rechten Winkel gegenüberliegende) Hypothenuse AB entstandenen beiden ebenfalls rechtwinkligen Dreiecke CDA und CDB ergeben die Gleichheit der Winkel BCD und CAD, da jeder mit Winkel ACD zusammen 90° ergibt (im rechtwinkligen Dreieck sind die beiden übrigen Winkel zusammen 90°). Wegen Übereinstimmung in allen Winkeln sind die Dreiecke CDA und CDB daher ähnlich, und, wie Abb. 20 besonders zeigt, entsprechen sich Strecke q in Dreieck CDA und h_c in Dreieck CDB, h_c in Dreieck CDA und Strecke p in Dreieck CDB, d. h.:

$$\boxed{q : h_c = h_c : p}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe auf die Hypothenuse die mittlere Proportionale zu den durch sie abgegrenzten Hypothenusenabschnitten. Die Strecken p und q nennt man auch die „Projektionen“ der über ihnen liegenden Katheten BC und AC auf die Hypothenuse AB.

Nach Abb. 21 ergibt die Gleichheit des Sehnen-Tangenten-Winkels AFS mit dem Umfangswinkel SBF des Kreises um M einerseits und die Übereinstimmung der sich deckenden Winkel BSF und ASF anderseits die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke BSF und FAS. Hierbei entsprechen

SF in Dreieck BSF der Strecke SA in Dreieck FSA
SB in Dreieck BSF der Strecke SF in Dreieck FSA

Also: $$SB : SF = SF : SA$$

Der Tangentenabschnitt SF ist die mittlere Proportionale zu den vom Schnittpunkt S aus gemessenen Sekantenabschnitten SB und SA.

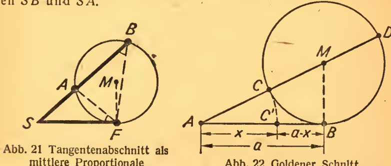


Abb. 21 Tangentenabschnitt als mittlere Proportionale

Abb. 22 Goldener Schnitt

Geht die Sekante AD (Abb. 22) durch den Kreismittelpunkt, so erhalten wir

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

Ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung 1 ab, und zwar links in der Gestalt $AB : AB$, rechts in der Darstellung $AC : AC$, so bleibt die Gleichung richtig und ergibt:

$$\frac{AD}{AB} - \frac{AB}{AB} = \frac{AB}{AC} - \frac{AC}{AC} = \frac{AD - AB}{AB} = \frac{AB - AC}{AC}$$

Macht man den Halbmesser MB gleich der Hälfte von AB, so daß $CD = AB$, so erhält man folgende Beziehung:

$$\frac{AD - AB}{AB} = \frac{AD - CD}{AB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{und} \quad \frac{AB - AC}{AC} = \frac{AB - AC'}{AC} = \frac{BC'}{AC'}, \text{ d. h.}$$

$BC' : AC = AC : AB$ oder $BC' : AC' = AC : AB$ oder $AB : AC' = AC' : BC'$. Durch Einführung der Kleinbuchstaben a und x einfacher dargestellt, erhalten wir endlich nach Abb. 22:

$$\boxed{a : x = x : (a - x)}$$

Diese Teilung heißt **„Goldener Schnitt“** und besagt:

Eine Strecke a läßt sich so in einen Abschnitt x und ihren Rest $(a - x)$ teilen, daß x die mittlere Proportionale zwischen

der ganzen Strecke und dem Rest wird. Die Gewinnung von x ist aus der Abbildung ohne weiteres ersichtlich.

Der Goldene Schnitt wird gern vom künstlerischen Standpunkt für gefällig wirkende Längenverhältnisse benutzt, z. B. in der Baukunst für die Festlegung der Höhe und Breite von Fenstern und Türen.

Flächenberechnung

Einfache Wiederholungsbeispiele

Nachdem früher[1] die Flächenberechnungen nur kurz behandelt worden sind, soll im folgenden durch Übungsbeispiele näher auf sie eingegangen werden.

69. Beispiel: Der Querschnitt folgender Flachstähle ist zu berechnen: 100/30, 120/50, 135/55.

Rechnungsgang: Wir nehmen die Breite mit der Höhe der Querschnitte mal und erhalten so die Inhalte der Querschnittsflächen der Flachstähle in mm².

Lösung:

100/30: $F = 100 \cdot 30 = 3000 \text{ mm}^2$
120/50: $F = 120 \cdot 50 = 6000 \text{ mm}^2$
135/55: $F = 135 \cdot 55 = 7425 \text{ mm}^2$

Querschnitt 100/30 = **3000 mm²**, 120/50 = **6000 mm²**, 135/55 = **7425 mm²**.

70. Beispiel: Eine Zugstange aus Flachstahl soll eine Last von 11250 kg aufnehmen. Ihre Dicke beträgt 15 mm. Wie groß muß ihre Breite sein, wenn 1 cm² eine Kraft von 1000 kg aufnehmen kann?

Rechnungsgang: Wir berechnen zunächst die erforderliche Querschnittfläche, indem wir die von der Zugstange aufgenommene Last P durch die Last p, die 1 cm² trägt, teilen. Die erhaltene Fläche F wird dann durch die uns bekannte Dicke d geteilt und so die Breite b gefunden.

Lösung: Erforderlicher Zugstangenquerschnitt: $F = \frac{P}{p} = \frac{11250}{1000} = 11{,}25 \text{ cm}^2$

Erforderliche Zugstangenbreite: $b = \frac{F}{d} = \frac{11{,}25}{1{,}5} = 7{,}5 \text{ cm}$

Die Zugstange muß **7,5 cm** = 75 mm breit sein.

71. Beispiel: Von einem mit 2 mm dickem Kupferblech eingedeckten Dach soll die Deckung der einen Dachfläche zwecks anderweitiger Verwendung abgenommen werden. Die Dachfläche hat die in Abb. 23 dargestellte Form eines Parallelogramms. Gewicht von 1 m² Kupferblech 17,8 kg. Welches Gewicht hat das abgenommene Kupferblech?

Rechnungsgang: Wir bezeichnen die Traufline der Dachfläche mit g, die Dachhöhe mit H, die schräggemessene Höhe der Dachfläche mit h und die halbe Gebäudetiefe mit $\frac{t}{2}$. Mit Hilfe von H und $\frac{t}{2}$ können wir unter Verwendung des Satzes des Pythagoras h berechnen. Den Inhalt der Dachfläche errechnen wir

[1] Vgl. 1. Teil S. 75—82.

mit Hilfe der Formel $F = g \cdot h$. Nehmen wir dann die Fläche mit dem Gewicht eines m² Kupferblech mal, so erhalten wir das Gewicht G des gesamten Kupfers.



Abb. 23 Dachfläche

Lösung: $h^2 = H^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 4{,}90^2 + 5{,}20^2 = 24{,}01 + 27{,}04 = 51{,}05$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{51{,}05} = 7{,}146; \quad h \approx 7{,}15 \text{ m}$$

Dachfläche $F = g \cdot h = 12{,}80 \cdot 7{,}15$

$= 91{,}52 \text{ m}^2$

Kupfergewicht $G = 91{,}52 \cdot 17{,}8 = 1629{,}056 \approx 1629$ kg

Es werden **1629 kg** Kupfer abgenommen.

72. Beispiel: Bei einem Werkstattgebäude (Abb. 24) mußte nach baupolizeilichen Vorschriften die Ecke 2,80 m vom Scheitelpunkt hereingerückt werden.

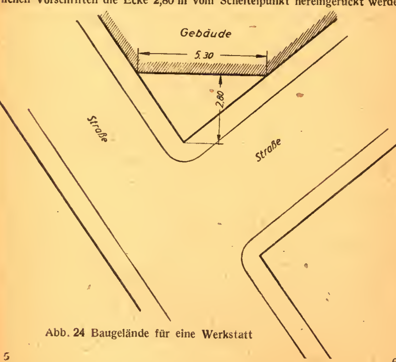


Abb. 24 Baugelände für eine Werkstatt

Die Schmalseite an der so gebrochenen Ecke bekam dabei die Länge von 5,30 m. Wieviel m² Bauland gingen verloren?

Rechnungsgang: Wir setzen in die Formel für die Dreiecksfläche die entsprechenden Werte ein und erhalten so den Flächeninhalt.

Lösung:
Verlorene Baugrundfläche:

$$F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{5{,}30 \cdot 2{,}80}{2} = 7{,}42 \text{ m}^2$$

Durch die Abschrägung gingen **7,42 m² Bauland verloren.**

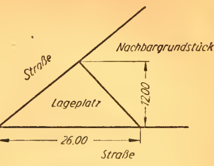


Abb. 25 Lagerplatz

73. Beispiel: Ein Schlossermeister bezahlt für den in Abb. 25 dargestellten Lagerplatz eine Jahrespacht von 450 RM. Wie hoch ist der Pachtzins je m²?

Rechnungsgang: Zunächst berechnen wir die Dreiecksfläche nach der Formel $F = \frac{g \cdot h}{2}$, den Betrag der Jahrespacht teilen wir dann durch den errechneten Flächeninhalt und erhalten den Pachtzins p für 1 m².

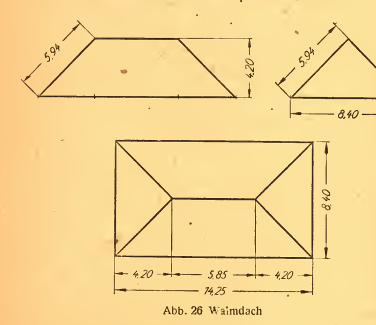


Abb. 26 Walmdach

Lösung: Lagerplatzfläche: $F = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{26 \cdot 12}{2} = 156 \text{ m}^2$

Pachtzins: $p = \frac{450}{156} \approx 2{,}88$ RM./m²

Der Schlossermeister zahlt für 1 m² des Lagerplatzes jährlich **2,88 RM.** Pacht.

74. Beispiel: Die Flächen des in Abb. 26 dargestellten Walmdaches sind mit Zinkblech zu versehen. Es ist mit $8^1/_2\%$ Verschnitt zu rechnen. Wieviel m² Schalung sind erforderlich?

Rechnungsgang: Wir berechnen zunächst die beiden Walmflächen (Dreiecksflächen); für jede derselben gilt die Formel $F_1 = \frac{g \cdot h}{2}$. Dann errechnen wir uns die Flächen der beiden Längsseiten des Daches, die die Form von Trapezen haben. Für sie gilt die Formel $F_2 = \frac{G + g}{2} \cdot h$. Die Summe aller 4 Flächen ergibt dann die Gesamtfläche des Daches. Von dieser errechnen wir uns $8^1/_2\%$ und schlagen sie zur Gesamtfläche hinzu.

Lösung: 1 Walmfläche: $F_1 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{8{,}40 \cdot 5{,}94}{2}$

$= 24{,}95 \approx 25{,}00 \text{ m}^2$

2 Walmflächen: $2F_1 =$ 50,00 m²

1 Längsfläche: $F_2 = \frac{G + g}{2} \cdot h = \frac{14{,}25 + 5{,}85}{2} \cdot 5{,}94$

$= 59{,}70 \approx 60{,}00 \text{ m}^2$

2 Längsflächen: $2F_2 =$ 120,00 m²

Gesamte Dachfläche: $F = 2F_1 + 2F_2$ 170,00 m²

Schnittverlust: $8^1/_2\% = \frac{170{,}00 \cdot 8{,}5}{100} = 14{,}45$ 14,45 m²

Holzbedarf: 184,45 m²

Wir benötigen zur Eindeckung des Daches **≈ 185 m²** Zinkblech.

Übungsaufgaben

28) Die Flächen des in Abb. 27 dargestellten Daches sind in Kupferblech eingedeckt worden. Zur Abrechnung der Arbeiten müssen die Dachflächen berechnet werden.

29) Die Höhe eines unbesteigbaren Schornsteines soll festgestellt werden. Ein Theodolit wird deshalb im Abstand von 100 m vom Schornstein aufgestellt und der höchste Punkt des Schornsteines anvisiert. Die Instrumentenhöhe beträgt 1,30 m. Die Ablesung auf einer im Abstand von 10 m vor dem Instrument in die Visierlinie eingeschobenen Meßplatte ergibt sich zu 3,67 m (Abb. 28). Wie hoch ist der Schornstein?

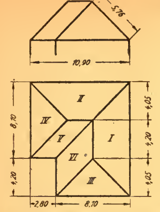


Abb. 27 Walmdach über rechtwinkligem Grundriß

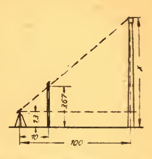


Abb. 28 Höhenmessung mit Hilfe eines Theodoliten

Umfang und Flächeninhalt des Kreises

Der Umfang eines Kreises wird berechnet nach der Formel

$$U = d \cdot \pi$$

der Flächeninhalt nach der Formel

$$F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

(Vgl. 1. Teil, S. 80 und 81.)

Um zur Formel für die Berechnung der Kreisfläche zu gelangen, teilen wir den Kreis in eine Reihe kleiner Kreisausschnitte ein. Je kleiner diese Kreisausschnitte sind, um so mehr nähert sich ihre Gestalt derjenigen eines Dreiecks. In Abb. 29 ist der Kreis in eine Anzahl solcher Dreiecke zerlegt. Die Höhen dieser Dreiecke können gleich dem Halbmesser r gesetzt werden. Die Grundlinien stellen die Bögen g_1, g_2, g_3 usw. dar. Diese Bögen kann man bei hinreichend kleinen Kreisausschnitten als gerade betrachten. Die Fläche des Kreises setzt sich, wie aus Abb. 29 zu ersehen ist, aus den einzelnen kleinen Dreiecken zusammen mit den Flächen:

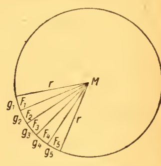


Abb. 29 Kreisinhalt

$$F_1 = \frac{g_1 \cdot r}{2}, \quad F_2 = \frac{g_2 \cdot r}{2}, \quad F_3 = \frac{g_3 \cdot r}{2} \quad \text{usw.}$$

Demnach ist der Flächeninhalt des Kreises:

$$F = \frac{g_1 \cdot r}{2} + \frac{g_2 \cdot r}{2} + \frac{g_3 \cdot r}{2} + \ldots + \frac{g_n \cdot r}{2}$$

Aus allen Gliedern der rechten Gleichungsseite können wir den gemeinsamen Faktor $\frac{r}{2}$ ausklammern.

$$F = \frac{r}{2}\,(g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n)$$

Die Summe $g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n$ ist gleich dem Umfang des Kreises.

$$g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n = U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Wird dieser Wert eingesetzt, so erhalten wir:

$$F = \frac{r}{2} \cdot 2\,r \cdot \pi$$

$$\boxed{F = r^2 \cdot \pi}$$

Da $r = \frac{d}{2}$ ist, kann man auch schreiben:

$$F = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi$$

$$\boxed{F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}}$$

Die auf diesem Wege gefundenen Formeln sind die uns bekannten.

75. Beispiel: Eine Halle, deren Grundriß die Form eines Kreises von 3,20 m Durchmesser hat, erhält als Fußbodenbelag einen neuen Zementestrich. Wieviel m² Estrich sind erforderlich?

Rechnungsgang: Wir gehen von der Formel für die Kreisfläche $F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$ aus und setzen die entsprechenden Werte ein.

Lösung: Fußbodenfläche $F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{3{,}20^2 \cdot 3{,}14}{4} = \frac{32{,}1536}{4}$

$$= 8{,}0384 \approx 8{,}04 \text{ m}^2$$

Für den Fußboden sind 8,04 m² Zementestrich erforderlich.

Flächeninhalt des Kreisrings

Eine von zwei konzentrischen Kreisen begrenzte Fläche nennen wir Kreisring (Abb. 30). Die Fläche des Kreisrings ist gleich dem Unterschied zwischen den beiden Kreisflächen.

Die Fläche des großen Kreises ist:

$$F_1 = \frac{D^2 \cdot \pi}{4}$$

Die Fläche des kleinen Kreises ist:

$$F_2 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

Die Fläche des Kreisringes ist:

$$F = F_1 - F_2 = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} - \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

Der gemeinsame Faktor $\frac{\pi}{4}$ kann ausgeklammert werden. Daher erhalten wir:

$$F = (D^2 - d^2)\,\frac{\pi}{4}$$

Abb. 30 Kreisring

Nun ist aber $D^2 - d^2 = (D + d) \cdot (D - d)$[1]. Also ist:

$$\boxed{F = (D + d) \cdot (D - d) \cdot \frac{\pi}{4}}$$

76. Beispiel: Der Querschnitt und die Mauerdicke eines vor Jahren gebauten kreisrunden Wasserturms, von dem keine Zeichnungen vorhanden sind, sollen berechnet werden. Da der Turm halbkugelförmig abgedeckt ist, lassen sich die äußeren Durchmesser und die Wanddicke nicht unmittelbar feststellen. Meßbar ist nur der äußere Umfang des Turmes mit $U = 42{,}02$ m und der innere Durchmesser mit $d = 10{,}82$ m (Abb. 31).

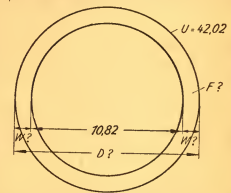


Abb. 31 Grundriß eines Wasserturms

Rechnungsgang: Wir berechnen zunächst unter Verwendung der Formel für den Kreisumfang ($U = D \cdot \pi$) den äußeren Durchmesser. Dann ziehen wir den inneren von dem äußeren Durchmesser ab, teilen den Rest durch 2 und erhalten somit zunächst die Wanddicke W.

Zur Berechnung der Querschnittfläche setzen wir in die Formel für die Kreisringfläche $\left(F = (D^2 - d^2)\,\frac{\pi}{4}\right)$ die Zahlenwerte ein.

Lösung:

$$U = D \cdot \pi$$

$$\frac{U}{\pi} = D$$

---

[1] Nach der Formel $(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$.

Äußerer Durchmesser: $D = \frac{U}{\pi} = \frac{42,02}{3,14} = 13,382 \approx 13,38$ m

Wanddicke: $w = \frac{D - d}{2}$

$= \frac{13,38 - 10,82}{2} = 1,28$ m

Die Wanddicke beträgt **1,28 m.**

Querschnittfläche $F = (D^2 - d^2)\frac{\pi}{4} = (13,38^2 - 10,82^2)\frac{\pi}{4}$

$= (179,02 - 117,07)\frac{3,14}{4} = 15,488 \cdot 3,14 = 48,632$

$\approx 48,63$ m³

Die Querschnittfläche des Wasserturmmauerwerks beträgt **48,63 m².**

77. Beispiel: Der Kolbenring einer Großkraftmaschine hat einen Außendurchmesser $D = 36$ cm und einen Innendurchmesser von $d = 31,5$ cm. Wie groß ist die Ringfläche des Kolbenringes?

Lösung: Wir benutzen die Formel für die Kreisringfläche:

$$F = (D^2 - d^2)\frac{\pi}{4} = (36^2 - 31,5^2)\frac{\pi}{4}$$

$$= (1296,0 - 992,3)\, 0,785 = 303,7 \cdot 0,785 \approx 238,41$$

$$F = 238,41 \text{ cm}^2$$

Abb. 32 Kolbenring

Bogenlänge und Flächeninhalt des Kreisausschnitts

Den von zwei beliebigen Halbmessern begrenzten Ausschnitt MAB eines Kreises (Abb. 33) bezeichnen wir als Kreisausschnitt. Das Stück AB der Kreislinie ist der Bogen b des Kreisausschnittes mit dem Mittelpunktswinkel α. Wenn der Bogen b größer wird, so nimmt auch der Mittelpunktswinkel α zu. Macht der Bogen den ganzen Kreisumfang aus, so ist der zugehörige Mittelpunktswinkel gleich 360°. Der Kreisumfang U ist gleich $2r \cdot \pi$. Man kann daher folgern:

Bei 360° beträgt die Bogenlänge:

$$b_0 = 2r \cdot \pi$$

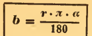
Bei 1° beträgt die Bogenlänge:

$$b_1 = \frac{2r \cdot \pi}{360} = \frac{r \cdot \pi}{180}$$

Bei α° beträgt die Bogenlänge:

$$b_\alpha = \frac{2r \cdot \pi \cdot \alpha}{360} = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$$

Die Länge des Bogens b eines Kreisausschnittes mit dem Halbmesser r und dem Mittelpunktswinkel α lautet also:



$$b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$$

Die Fläche des Kreisausschnittes nimmt ebenso wie der Bogen mit dem größer werdenden Mittelpunktswinkel zu. Ist der Mittelpunktswinkel gleich 360°, so wird aus der Fläche des Kreisausschnittes eine ganze Kreisfläche, deren Inhalt $r^2 \cdot \pi$ ist. Man kann daher folgern:

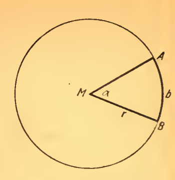


Abb. 33 Kreisausschnitt

Bei 360° beträgt die Fläche des Kreisausschnittes $F_0 = r^2 \cdot \pi$

Bei 1° beträgt die Fläche des Kreisausschnittes $F_1 = \frac{r^2 \cdot \pi}{360}$

Bei α° beträgt die Fläche des Kreisausschnittes $F = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

Die Fläche des Kreisausschnittes können wir also mit Hilfe des Mittelpunktswinkels α und des Halbmessers r nach folgender Formel berechnen:

$$\boxed{F = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}}$$

Oft ist aber der Mittelpunktswinkel α nicht bekannt. Deshalb müssen wir versuchen, für die Kreisausschnittfläche eine Formel zu finden, in welcher α nicht vorkommt. Für $F = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ kann man auch schreiben:

$$F = \frac{r \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{2 \cdot 180}$$

Der Wert $\frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180}$ ist gleich dem Bogen b. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$F = \frac{r \cdot b}{2}$$

Wir können somit die Fläche des Kreisausschnittes mit Hilfe des Halbmessers r und des Bogens b nach folgender Formel berechnen:

$$\boxed{F = \frac{r \cdot b}{2}}$$

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist also ebenso groß wie der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie die Bogenlänge b und dessen Höhe der Halbmesser r ist.

78. Beispiel: Es soll ein kegliger Schornsteinaufsatz gefertigt werden, dessen Abmessungen sich aus Abb. 34 für $r = 250$ mm ergeben.

a) Wie groß muß der Ausschnittwinkel x der dazu nötigen Blechscheibe mit dem Radius $R = r\sqrt{2}$ gewählt werden?

b) Was wiegt der Aufsatz ohne Befestigungsbügel, wenn Stahlblech von $s = 3$ mm Stärke und der Wichte $\gamma = 7{,}9$ g/cm³ benutzt wird?

Lösung: Zu a) Der Kreisumfang $U = 2\pi r$ des fertigen Aufsatzes ist gleich dem Umfang $R\frac{\pi}{180}(360 - x)$ der ausgesparten und keglig zu walzenden Kreisscheibe.

Abb. 34 Schornsteinaufsatz

$$2\pi r = R\frac{\pi}{180}(360 - x)$$

$$x = 360 - 360 \cdot \frac{r}{R} = 360\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 360\left(1 - \frac{r}{r\sqrt{2}}\right)$$

$$= 360\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 360\,(1 - 0{,}707) = 360 \cdot 0{,}293 = 105{,}48$$

$$\underline{\underline{x = 105{,}5^\circ}}$$

Zu b) Das Gewicht des Schornsteinaufsatzes ist: Fläche F der ausgesparten Blechscheibe mal Blechdicke s mal Wichte γ, also:

$$G^{[g]} = F^{[\mathrm{cm}^2]} \cdot s^{[\mathrm{cm}]} \cdot \gamma^{[g/\mathrm{cm}^3]}$$

$$F = \frac{R}{2} \cdot R\frac{\pi}{180}(360 - 105{,}5) = R^2 \cdot \pi \cdot \frac{254{,}5}{360} = 2\,r^2 \cdot \pi \cdot \frac{254{,}5}{360}$$

$$G = 2\,r^2\pi \cdot \frac{254{,}5}{360} \cdot 0{,}3 \cdot 7{,}9 = 2 \cdot 25^2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{254{,}5}{360} \cdot 0{,}3 \cdot 7{,}9 = 6570\,\mathrm{g}$$

$$\underline{\underline{G \approx 6{,}6\ \mathrm{kg}}}$$

79. Beispiel: An einem Schwungrad (Abb. 35) wird zum Ausgleich gegen einen Kurbelzapfen eine Schwungmasse (geschrafft) eingegossen. Der Werkstoff ist Stahlguß. Welches Gewicht hat die Schwungmasse?

Rechnungsgang: Das Gewicht berechnen wir aus Fläche, Dicke und Wichte. Die Wichte für Stahl beträgt im Mittel $\gamma = 7{,}86$ g/cm³, die Dicke ist mit 90 mm gegeben. Die Fläche muß berechnet werden. Wir erhalten eine ausreichende Genauigkeit, wenn wir die Fläche als Unterschied der beiden Kreisausschnitte mit den Halbmessern 700 und 410 ermitteln. Die Bogenlängen

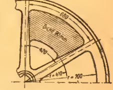


Abb. 35 Schwungrad

wurden gemessen. Die Rechnung wird zweckmäßig mit den Werten in cm durchgeführt.

Lösung: Die Fläche des Kreisausschnittes mit dem Halbmesser 700 ist:

$$F_1 = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{68 \cdot \overset{35}{70}}{2} = 2380 \text{ cm}^2$$

Die Fläche des Kreisausschnittes mit dem Halbmesser 410 ist:

$$F_2 = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{42 \cdot 41}{2} \overset{21}{} = 861 \text{ cm}^2$$

Die Fläche der Schwungmasse ist:

$$F = F_1 - F_2 = 1519 \text{ cm}^2$$

$$G = \text{Fläche} \cdot \text{Dicke} \cdot \text{Wichte} = \frac{1519 \cdot 9 \cdot 7{,}86}{1000} \approx \underline{\underline{107 \text{ kg}}}$$

Flächeninhalt des Kreisabschnittes

Wird in einem Kreise eine beliebige Sehne s gezogen, so schneidet diese von der Kreisfläche ein Stück ab, das wir Kreisabschnitt nennen (Abb. 36). Die Fläche des Kreisabschnittes ergibt sich als Unterschied des Kreisausschnittes und des Dreiecks über der Sehne s. Die Höhe des Dreiecks ist um das Stück h kleiner als r, also Höhe $= (r - h)$.

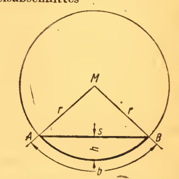


Abb. 36 Kreisabschnitt

Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist dann:

$$F_1 = \frac{\text{Sehne} \cdot \text{Dreieckshöhe}}{2} = s \cdot \frac{(r-h)}{2} = \frac{s \cdot r}{2} - \frac{s \cdot h}{2}$$

Der Flächeninhalt des Kreisausschnittes ist, wie schon festgestellt,

$$F_2 = \frac{\text{Halbmesser} \cdot \text{Bogenlänge}}{2} = \frac{r \cdot b}{2}$$

Die Fläche des Kreisabschnittes ist der Unterschied zwischen F_2 und F_1:

$$F = F_2 - F_1 = \frac{b \cdot r}{2} - \left(\frac{s \cdot r}{2} - \frac{s \cdot h}{2}\right)$$

Die Klammer aufgelöst, erhalten wir:

$$F = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot r}{2} + \frac{s \cdot h}{2} = \frac{1}{2}(b \cdot r - s \cdot r + s \cdot h) = \frac{1}{2}[r(b - s) + s \cdot h]$$

$$F = \tfrac{1}{2}[r(b - s) + s \cdot h]$$

Diese Formel, die den Flächeninhalt des Kreisabschnittes genau ergibt, wird im allgemeinen nur zur Berechnung von Kreisabschnitten mit großem

Stichmaß angewendet. Bei Kreisabschnitten, in denen der Unterschied zwischen b und s, also der Bogenstich h klein ist, rechnet man in der Praxis mit der Annäherungsformel:

$$\boxed{F = \frac{2}{3} s \cdot h}$$

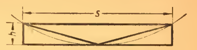


Abb. 37 Mittelwert für den Inhalt eines Kreisabschnitts

Wie aus Abb. 37 hervorgeht, muß der Wert des Flächeninhalts des Kreisabschnittes zwischen dem Wert $s \cdot h$ (Rechteckfläche) und $\frac{s \cdot h}{2}$ (Dreieckfläche) liegen. $\frac{2}{3} s \cdot h$ kommt diesem Mittelwert genügend nahe.

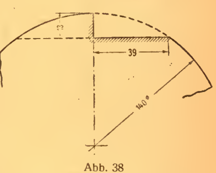


Abb. 38

80. Beispiel: In eine Welle wird eine Keilnut nach Abb. 38 gefräst. Wie groß ist der Werkstoffquerschnitt nach dem Fräsen?

Rechnungsgang: Die ausgefräste Fläche ist die Hälfte des ganzen Kreisabschnittes. Wir berechnen den Kreisabschnitt und nehmen davon die Hälfte. Die Sehne ist $s = 2 \cdot 39 = 78$ mm, und die Bogenhöhe ist $h = 13$ mm.

Lösung: Ganzer Kreisabschnitt $= \frac{2}{3} \cdot s \cdot h = \frac{2 \cdot \overset{26}{78} \cdot 13}{3} = 26 \cdot 26 = 676 \text{ mm}^2$

Halber Kreisabschnitt $= \frac{676}{2} = 338 \text{ mm}^2$

Die Keilnut beträgt 338 mm².

Ganzer Wellenquerschnitt $140^2 \frac{\pi}{4}$	= 15390 mm²
Keilnut	338 mm²
Restquerschnitt	15052 mm²

Der Werkstoffquerschnitt nach dem Fräsen beträgt **15052 mm².**

Flächeninhalt und Umfang der Ellipse

Die Ellipse hat zwei Ausdehnungen, die wir große und kleine Achse nennen (Abb. 39). Wenn die Längen der großen und kleinen Achse gegeben sind, so gehört hierzu eine bestimmte Ellipse. Wie Abb. 39 erkennen läßt, ist die Fläche der Ellipse kleiner als die des Kreises mit der großen Achse als Durchmesser und größer als die des Kreises, dessen Durchmesser die kleine Achse ist. Die Fläche des großen Kreises ist $F = \frac{D^2 \cdot \pi}{4}$, die des

kleinen Kreises ist $F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$. Da $\frac{\pi}{4}$ immer denselben Wert behält, wird der Flächeninhalt durch einen Mittelwert zwischen D^2 und d^2 bestimmt. Diesen Mittelwert errechnen wir mit Hilfe des Produktes $D \cdot d$ und erhalten als Flächeninhalt der Ellipse:

$$F = \frac{D \cdot d \cdot \pi}{4}$$

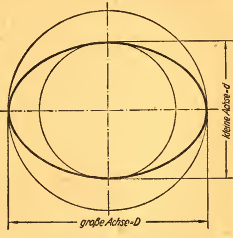


Abb. 39 Achsen der Ellipse

Auch der Umfang der Ellipse stellt einen Wert dar, der kleiner als der Umfang des Kreises mit der großen Achse (Abb. 39) und größer als der Umfang des Kreises mit der kleinen Achse ist. Der Umfang der Ellipse ergibt sich daher angenähert als Mittelwert aus den Kreisumfängen:

$$U_1 = D \cdot \pi \text{ und } U_2 = d \cdot \pi$$

Dieser angenäherte Mittelwert ist also: $\frac{U_1 + U_2}{2} = \frac{D \cdot \pi + d \cdot \pi}{2}$

$$U = \frac{D + d}{2} \pi$$

81. Beispiel: Das elliptische Schauglas eines Trockenschranks soll eine Dichtung aus Vierkantgummi erhalten. Die beiden Durchmesser der Dichtungsnut sind $D = 30$ cm und $d = 20$ cm. In welcher Länge muß der Gummi abgeschnitten werden, wenn noch 2 cm für das Stauchen des Gummis beim Einlegen in die Dichtungsnut verfügbar sein sollen?

Lösung: Der Umfang der Dichtungsnut ist

$$U = \frac{D + d}{2} \cdot \pi = \frac{30 + 20}{2} \cdot \pi = 25 \cdot 3{,}14 = 78{,}5 \text{ cm}$$

Mit 2 cm Zuschlag für das Stauchen des Gummis beim Einlegen ist die abzuschneidende Länge des Gummis = 78,5 + 2 = <u>80,5 cm.</u>

82. Beispiel: Welcher Kraft muß die Glasscheibe des vorhergehenden Beispiels standhalten, wenn in dem Trockenschrank ein absoluter Druck von 0,3 kg/cm² herrscht?

Lösung: Die Glasscheibe wird je cm² Fläche mit 1 kg Luftdruck — 0,3 kg Innendruck, also 0,7 kg/cm² beansprucht. Die gesamte Fläche F der elliptischen Scheibe ist

$$F = \frac{D \cdot d \cdot \pi}{4} = \frac{30 \cdot 20 \cdot \pi}{4} = 471 \text{ cm}^2$$

Die Belastung der Scheibe ist daher: $0{,}7 \cdot 471 \approx$ **330 kg.**

Übungsaufgabe

30) In die Dichtungsnut des elliptischen Verschlußdeckels eines Kessels ist ein Vierkantgummi einzusetzen; für das Stauchen des Gummis beim Einlegen ist ein Zuschlag auf die ermittelte Dichtungslänge von 5% zu machen. Wie lang muß der Gummi geschnitten werden, wenn der Verschlußdeckel die Abmessungen $D = 50$ cm und $d = 40$ cm hat? Welche Kraft haben die Verschlußschrauben aufzunehmen, wenn der Kesselinhalt mit 5 kg/cm² Überdruck gegenüber dem Luftdruck geprüft werden soll (Abb. 40)?

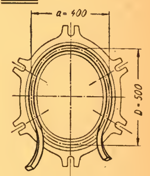


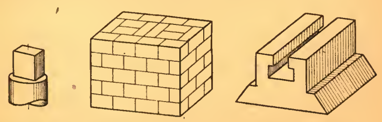
Abb. 40 Elliptischer Verschlußdeckel

Rauminhalt, Mantel und Oberfläche einfacher Körper

Bei der Durchführung von Massenberechnungen oder Lasten- und Gewichtsermittlungen sind durchweg Körper zu berechnen, die eine regelmäßige Form aufweisen. Da sich diese Körper auf einige wenige Grundkörper zurückführen lassen, kommen wir bei ihrer Berechnung mit einer geringen Anzahl von Formeln aus.

Das Prisma

Der einfachste Grundkörper ist das Prisma. Bereits früher ist darauf hingewiesen worden, daß ein Flacheisenstück ein solches Prisma ist. Auch der Vierkant in Abb. 41, das Maschinenfundament in Abb. 42 und das Gleitstück in Abb. 43 sind Prismen.


Abb. 41 Vierkant Abb. 42 Maschinenfundament Abb. 43 Gleitstück

Vergleichen wir diese Körper miteinander, so finden wir, daß ihnen zweierlei gemeinsam ist: einmal sind bei ihnen mindestens zwei der Begrenzungsflächen parallel und deckungsgleich, zum andern sind alle Schnittkanten der übrigen Begrenzungsflächen parallel. Bei dem Maschinenfundament der Abb. 42 z. B. sind die Fläche, auf der das Fundament steht, und seine obere Begrenzungsfläche die oben erwähnten parallelen Begrenzungsflächen. Da man sich jedes Prisma so wie diesen Pfeiler auf eine der beiden Flächen gestellt denken kann, die parallel und deckungsgleich sein müssen, nennt man auch allgemein beim Prisma die eine dieser beider Flächen die Grundfläche und die andere die Deckfläche. Die Seitenflächen bilden zusammengenommen den Mantel des Prismas. Das Gleitstück der Abb. 43 wäre demnach ein liegendes Prisma. Die Stirnfläche ist als Grundfläche des Prismas anzusehen, die hinten liegende Fläche als Deckfläche. Die übrigen Flächen des Prismas bilden den Mantel.

Sonderformen des Prismas sind der Quader, auch Rechtkant genannt, die quadratische Säule und der Würfel. Alle drei sind gerade Prismen, d. h. bei ihnen stehen die Seitenflächen alle senkrecht zur Grundfläche, wie z. B. beim Maschinenfundament in Abb. 42. Beim Quader ist die Grundfläche ein Rechteck; das Maschinenfundament ist also ein Quader. Bei der quadratischen Säule (Vierkant in Abb. 41) ist die Grundfläche quadratisch, und beim Würfel sind bekanntlich alle Begrenzungsflächen Quadrate. Die Formel für den Rauminhalt des Prismas ist bekannt. Sie lautet:

Rauminhalt des Prismas = Grundfläche mal Höhe

$$\boxed{V = F \cdot h}$$

Um uns die Richtigkeit dieser Formel zu veranschaulichen, zerlegen wir das in Abb. 44 gezeichnete Prisma, einen Quader, in ebensoviel waagerechte Schichten, wie das Prisma Zentimeter hoch ist.

Ferner zerlegen wir jede Schicht in Würfel von 1 cm Kantenlänge. Ein solcher Würfel von 1 cm³ Rauminhalt dient als Maßeinheit. Da die Grundfläche des Prismas den Flächeninhalt 5 cm · 5 cm = 25 cm² hat, so sind in jeder Schicht 25 Würfel von 1 cm³ Rauminhalt enthalten. Die Höhe des Quaders beträgt 10 cm. Die 25 Würfel von 1 cm³ Rauminhalt sind also 10mal vorhanden. Damit sind in dem Prisma insgeasmt $25 \cdot 10 = 250$ Würfel von 1 cm³ Rauminhalt = 250 cm³ enthalten. Da die

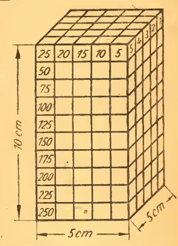


Abb. 44 Rauminhalt eines Quaders

Zahl 25 angibt, wieviel Quadratzentimeter die Grundfläche groß ist, und die Zahl 10, wieviel Zentimeter das Prisma hoch ist, ist somit die Richtigkeit der Formel $V = F \cdot h$ für den Quader der Abb. 44 nachgewiesen. Ähnlich läßt sich ihre Richtigkeit für alle nur denkbaren Prismen beweisen.

83. Beispiel: Der Rauminhalt des in Abb. 45 dargestellten Führungsstücks ist mit den in der Abbildung angegebenen Maßen zu berechnen.

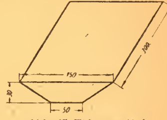


Abb. 45 Führungsstück

Rechnungsgang: Das Führungsstück ist ein liegendes Prisma, dessen Grundfläche ein Trapez ist. Die Höhe des Prismas ist gleich der Länge des Führungsstücks. Der Flächeninhalt des Trapezes ist Mittelparallele mal Höhe.

Lösung: Rauminhalt des Führungsstückes (Abb. 45) ist Grundfläche mal Höhe des Prismas.

$$V = \frac{15 + 5}{2} \cdot 3 \cdot 30 = 900 \text{ cm}^3$$

Ergebnis: Der Rauminhalt des Führungsstücks beträgt **900 cm³**.

Denken wir uns den Mantel eines geraden Prismas abgewickelt und ausgebreitet, so erhalten wir ein Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Umfang der Grundfläche und dessen andere Seite gleich der Höhe des Prismas ist.

Mantel des geraden Prismas = Umfang der Grundfläche mal Höhe

$$\boxed{M = U \cdot h}$$

Soll die Oberfläche des geraden Prismas berechnet werden, so müssen zur Mantelfläche noch die Grund- und die Deckfläche hinzugezählt werden.

Oberfläche des geraden Prismas = Mantelfläche + zweimal Grundfläche

$$\boxed{O = M + 2F}$$

84. Beispiel: Ein oben offener Behälter aus Stahlblech von 1400 mm Länge, 1000 mm Breite und 600 mm Höhe soll innen und außen gestrichen werden. Für wieviel m² Fläche ist Farbe anzusetzen, wenn für die Berechnung die Blechdicke unberücksichtigt bleibt?

Rechnungsgang: Da der Behälter oben offen ist, fehlt dem Prisma die Deckfläche. Jedoch sind Grundfläche und Mantel mit zwei zu multiplizieren, da der Behälter innen und außen gestrichen werden soll.

Lösung: Die gesuchte Oberfläche O ist zu berechnen nach der Gleichung

$$O = 2(M + F) = 2[(2 \cdot 1{,}4 + 2 \cdot 1{,}0) \cdot 0{,}6 + 1{,}4 \cdot 1{,}0]$$
$$= 2[(2{,}8 + 2{,}0) \cdot 0{,}6 + 1{,}4 \cdot 1{,}0] = 2[2{,}88 + 1{,}4] = 2 \cdot 4{,}28$$
$$O = 8{,}56 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Es ist also für eine Fläche von $8{,}56 \text{ m}^2$ Farbe anzusetzen.

85. Beispiel: Ein eingebauter Kühlschrank, der innen eine Grundfläche 0,80/1,20 m hat und eine Höhe von 1,80 m, soll mit Dämmplatten neu ausgekleidet werden. Wieviel m² Dämmplatten sind hierzu erforderlich?

Rechnungsgang: Der Kühlraum stellt ein gerades Prisma dar, dessen Oberfläche zu berechnen ist. $O = M + 2F$.

Lösung: Oberfläche des Kühlraums:

$$2(0{,}80 + 1{,}20) \cdot 1{,}80 + 2 \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}20 = 9{,}10 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Es sind also $9{,}10 \text{ m}^2$ Dämmplatten erforderlich.

Der Zylinder

Der Zylinder ist eine weitere Sonderform des Prismas. Er entsteht, wenn die Begrenzung der Grund- und damit auch der Deckfläche des Prismas krummlinig wird. Je nach der Form der Grundfläche kann man unterscheiden zwischen Kreiszylinder, meist einfach Zylinder oder Walze

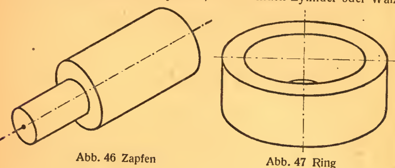


Abb. 46 Zapfen

Abb. 47 Ring

genannt (Zapfen in Abb. 46) und elliptischem Zylinder. Oft kommt im Maschinenbau auch der Hohlzylinder vor, dessen Grund- bzw. Deckfläche Ringflächen sind (Ring in Abb. 47).

Da der Zylinder ein Prisma ist, gilt für ihn auch die Formel:

Rauminhalt = Grundfläche × Höhe

Beim Kreiszylinder, kurz Zylinder genannt, ist die Grundfläche ein Kreis mit dem Flächeninhalt $F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$, es ist also:

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$$

86. Beispiel: Ein zylindrischer Kessel hat einen Durchmesser $D = 1200$ mm und eine Länge $l = 2800$ mm. Welches Gewicht hat die Wasserfüllung? (Wichte des Wassers $\gamma = 1{,}0$ kg/dm³.)

Rechnungsgang: Wir berechnen zuerst den Rauminhalt des Kessels nach der Formel für den Zylinder: $V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$ und ersetzen d durch D und h durch l. Wir erhalten also für unser Beispiel: $V = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot l$. Den Rauminhalt nehmen wir mit der Wichte mal und erhalten das Gewicht der Wasserfüllung.

Lösung: Rauminhalt der Wasserfüllung: $V = \frac{12^2 \cdot \pi}{4} \cdot 28 = 3167 \text{ dm}^3$

Gewicht der Wasserfüllung: $G = 3167 \cdot 1{,}0 = 3167$ kg

Die Wasserfüllung wiegt $\approx$ **3,2 t.**

Beim Hohlzylinder ist die Grundfläche meist ein Kreisring mit dem Flächeninhalt $F = (D^2 - d^2) \cdot \frac{\pi}{4}$. Demnach ist der Rauminhalt des Hohlzylinders:

$$V = (D^2 - d^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot h$$

87. Beispiel: Ein Schwungradkranz hat einen äußeren Durchmesser $D = 1100$ mm, einen inneren Durchmesser $d = 900$ mm und eine Breite $b = 130$ mm. Welches Gewicht hat der Kranz? (Wichte des Gußeisens $\gamma = 7{,}2$ kg/dm³.)

Rechnungsgang: Der Schwungradkranz stellt einen Hohlzylinder dar, dessen Raum berechnet wird nach der Gleichung $V = (D^2 - d^2) \frac{\pi}{4} \cdot h$, in der h durch b zu ersetzen ist.

Lösung: Rauminhalt: $V = (D^2 - d^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot b = (11{,}0^2 - 9{,}0^2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}3$

$= (121 - 81) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}3 = 40 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1{,}3 = 40{,}8 \text{ dm}^3$

Gewicht: $G = 40{,}8 \cdot 7{,}2 = 294$ kg

Der Schwungradkranz wiegt **294 kg.**

Während sich der Mantel des geraden Prismas aus mehreren Rechtecken zusammensetzt, bildet der Mantel des geraden Zylinders in seiner Abwicklung eine einzige zusammenhängende Rechteckfläche. Biegt man die Wandungen eines geraden zylinderförmigen Blechrohres auseinander, so erhält man ein rechteckiges Blech. Es ist also:

Mantelfläche = Umfang der Grundfläche × Höhe

Beim Kreiszylinder ist der Umfang der Grundfläche $U = d \cdot \pi$, es ist hier also:

$$M = d \cdot \pi \cdot h$$

88. Beispiel: 25 Blechrohre mit einem Durchmesser $d = 120$ mm und einer Länge $l = 2{,}25$ m sollen gebogen werden. Wieviel m² Blech sind erforderlich?

Rechnungsgang: Die erforderliche Fläche für ein Rohr ist der Mantel eines Zylinders mit dem Durchmesser d und der Höhe l: $M = d \cdot \pi \cdot l$.

Lösung: Blechbedarf für **ein** Rohr: $M = 0{,}12 \cdot \pi \cdot 2{,}25 = 0{,}848$ m²
Blechbedarf für 25 Rohre: $F = 25 \cdot 0{,}848 \quad = 21{,}2$ m²
Es werden also **21,2 m²** Blech benötigt.

Die Pyramide

Die Pyramide tritt uns in Form der Turmdächer entgegen (Abb. 48). Sie entsteht, wenn man sämtliche Ecken eines Vielecks mit einem darüber liegenden Punkt verbindet. Als Seitenflächen erhält man ebensoviel Dreiecke, wie die Grundfläche Seiten hat. Sie bilden in ihrer Gesamtheit den Mantel der Pyramide. Die Höhe der Pyramide finden wir, indem wir von der Spitze der Pryamide das Lot auf die Grundfläche fällen (s. Abb. 48).

Auch die Formel für den **Rauminhalt der Pyramide** hat einen einfachen Aufbau.

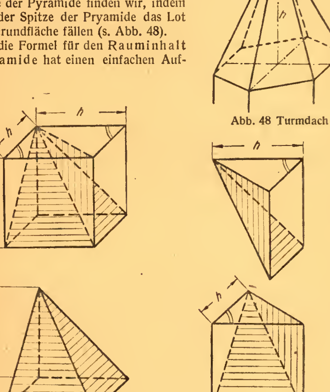


Abb. 48 Turmdach

Abb. 49 Rauminhalt der Pyramide

$$\text{Rauminhalt} = \frac{\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{F \cdot h}{3}}$$

Ihre Richtigkeit können wir uns veranschaulichen, indem wir einen Würfel so in drei gleiche Teile zerlegen, wie das in Abb. 49 gezeigt wird. Die drei Schnittflächen sind geschrafft worden. Es entstehen drei vollkommen gleich geartete Pyramiden (Abb. 49). Alle drei haben eine Quadratseite des Würfels als Grundfläche und bei allen dreien fällt die Höhe mit einer Kante des Würfels zusammen. Der Inhalt einer dieser Pyramiden ist also gleich dem dritten Teil des Würfelinhaltes, der nach der Formel für den Rauminhalt des Prismas gleich $F \cdot h$ ist. Da die drei Pyramiden dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe haben wie der Würfel, gilt somit für jede der drei Pyramiden als Formel für den Rauminhalt: $V = \frac{F \cdot h}{3}$.

Damit ist zwar nicht die Allgemeingültigkeit dieser Formel bewiesen, doch wird durch diesen Einzelfall ihre Richtigkeit anschaulich vor Augen geführt.

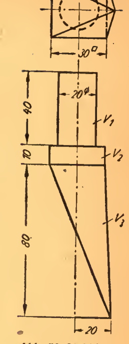


Abb. 50 Stahldorn

89. Beispiel: Das Gewicht von 250 Stahldornen nach Abb. 50 soll berechnet werden. (Wichte $\gamma = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$.)

Rechnungsgang: Der Rauminhalt eines Dorns setzt sich zusammen aus dem zylindrischen Zapfen V_1, dem Vierkant V_2 und dem pyramidenförmigen eigentlichen Dorn V_3. Trotzdem die Spitze der Pyramide nicht unter der Mitte der Grundfläche liegt, kann die angegebene Formel benutzt werden.

Lösung: Rauminhalt des Zapfens: $V_1 = \frac{2{,}0^2 \pi}{4} \cdot 4{,}0 = 12{,}6\ \mathrm{cm^3}$

Rauminhalt des Vierkants: $V_2 = 3{,}0^2 \cdot 1{,}0 = 9{,}0\ \mathrm{cm^3}$

Rauminhalt des eigentlichen Dorns: $V_3 = \frac{3{,}0^2 \cdot 8{,}0}{3} = 24{,}0\ \mathrm{cm^3}$

Rauminhalt eines Dorns: $V_0 = 45{,}6\ \mathrm{cm^3}$

Gewicht eines Dorns: $G_0 = 45{,}6 \cdot 7{,}8 = 356\ \mathrm{g}$

Gewicht der 250 Dorne: $G = \frac{356}{1000} \cdot 250 = 89\ \mathrm{kg}$

Das Gewicht der 250 Stahldorne beträgt **89 kg.**

Die Aufgabe, den Mantel einer Pyramide zu berechnen, ist zu lösen, wenn die Fläche für einen pyramidenförmigen Behälter festgestellt werden soll. Eine allgemein gültige einfache Formel für die Berechnung des Pyramidenmantels gibt es nicht. Die Mantelfläche ist von Fall zu Fall als Summe der Dreiecksflächen zu berechnen, die den Mantel bilden.

Der Kegel

So wie aus dem Prisma der Zylinder entsteht, wenn die Begrenzung der Grundlinie krummlinig wird, so entsteht aus der Pyramide in gleicher Weise der Kegel. Körnerspitzen z. B. sind kegelförmig. Beim Aufschütten von Sand, Kies oder Schotter können kegelförmige Haufen entstehen. Sie bilden sich immer dann, wenn diese Baustoffe gleichmäßig von einer Stelle aus geschüttet werden.

Für den Rauminhalt des Kegels gilt dieselbe Formel wie für den Rauminhalt der Pyramide, denn der Kegel ist nur eine Sonderform der Pyramide:

$$\text{Rauminhalt} = \frac{\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}}{3}$$

Beim Kreiskegel (Abb. 51) ist die Grundfläche wie beim Kreiszylinder ein Kreis mit dem Flächeninhalt $F = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$, es ist also:

$$\boxed{V = \frac{\frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h}{3}}$$

S
A
$h = 3{,}75\,m$
$d = 2{,}40\,m$
$r = 1{,}20\,m$
A_1
$b = d \cdot \pi$
Kegelmantel
$R = S$

Abb. 51 Abwicklung des geraden Kreiskegels

90. Beispiel: Ein Sandhaufen hat angenähert die Form eines geraden Kreiskegels von 1,20 m Höhe. Der Durchmesser der Grundfläche beträgt 3,00 m. Wieviel m³ Sand enthält dieser Haufen?

Lösung: Rauminhalt des Sandhaufens: $V = \frac{\frac{3{,}00^2 \cdot 3{,}14}{4} \cdot 1{,}20}{3} = 2{,}83\ m^3$

Der kegelförmige Haufen enthält $\underline{\underline{2{,}83\ m^3}}$ Sand.

Der Mantel des Kegels bildet wie auch der Mantel des Zylinders eine einzige zusammenhängende Fläche (Abb. 51). Die Mantelfläche läuft in der Spitze des Kegels zusammen und wird unten durch den Grundkreis begrenzt. Um zu einer Formel für den Flächeninhalt des geraden Kreiskegelmantels zu kommen, zeichnen wir uns seine Abwicklung auf (Abb. 51). Hierzu denken wir uns den Mantel entlang der Mantellinie AS aufgeschnitten und vom Kegel losgelöst. Jeder Punkt des Grundkreises ist genau so weit von der

Spitze S entfernt wie der Punkt A. Breiten wir den abgewickelten Mantel aus, so muß auch in der Abwicklung des Kegelmantels jeder Punkt des abgewickelten Grundkreises genau so weit von dem Punkt S entfernt sein wie der Punkt A, d. h. die untere Begrenzungslinie AA_1 der abgewickelten Mantelfläche muß ein Kreisbogen sein. Der ausgebreitete Kegelmantel stellt also einen Kreisausschnitt dar. Die Mantellinie AS des Kegels ist der Halbmesser R dieses Kreisausschnittes und der Umfang des Grundkreises des Kegels der Bogen b des Kreisausschnittes.

Die Formel für den Flächeninhalt des Kreisausschnittes lautet $F = \frac{R \cdot b}{2}$.

Da b gleich dem Umfang des Grundkreises $d \cdot \pi$ ist und R gleich der Seitenlinie s, so lautet die Formel für den Flächeninhalt des Kegelmantels:

$$M = \frac{d \cdot \pi \cdot s}{2}$$

91. Beispiel: Das Turmdach mit den Maßen nach Abb. 51 soll verschalt werden. Wie groß ist die zu verschalende Fläche?

Rechnungsgang: Die zu verschalende Fläche ist die Mantelfläche eines Kegels. Es ist: $M = \frac{d \cdot \pi \cdot s}{2}$ · Während d bekannt ist, muß s erst ausgerechnet werden. s ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (Abb. 51), dessen kleine Kathete gleich dem halben Grundflächendurchmesser ist und dessen große Kathete gleich der Höhe des Daches ist. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist

$$s^2 = 3{,}75^2 + 1{,}20^2$$

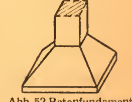
Lösung: Mantellinie $s = \sqrt{3{,}75^2 + 1{,}20^2} = \sqrt{14{,}06 + 1{,}44} = \sqrt{15{,}50} = 3{,}94$ m
Den Wert für $3{,}75^2$ können wir nicht unmittelbar den Technischen Tabellen entnehmen. Wir finden auf S. 5 für $37{,}5^2$ den Wert 1406. Der Wert für $3{,}75^2$ ist dann 14,06. Den Wert für $1{,}2^2$ finden wir auf S. 2 zu 1,44, den Wert für $\sqrt{15{,}5}$ auf S. 3 zu $3{,}937 \approx 3{,}94$ m.

Einzuschalende Fläche $= \frac{2{,}40 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}94}{2} = 14{,}85\ \text{m}^2$

Die einzuschalende Fläche beträgt **14,85 m²**.

Der Pyramidenstumpf

Der Pyramidenstumpf, d. h. die abgeschnittene Pyramide, kommt in der Praxis häufiger vor als die ganze Pyramide. Fundamente (Abb. 52) und Silotrichter (Abb. 53) haben häufig die Form einer abgestumpften Pyramide. Zu beachten ist, daß diese Körper oft nur angenähert die Form des Pyramidenstumpfes haben. Verlängert man bei einem Pyramidenstumpf die Seitenkanten (Abb. 54), so müssen sie sich in einem Punkt, der Spitze der Pyramide, schneiden. Ist das nicht der Fall, wie z. B. bei dem


Abb. 52 Betonfundament

Schotterhaufen der Abb. 55, so ist der Körper kein Pyramidenstumpf, sondern ein Obelisk.

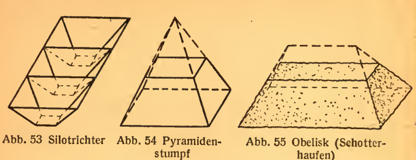


Abb. 53 Silotrichter Abb. 54 Pyramidenstumpf Abb. 55 Obelisk (Schotterhaufen)

Die Berechnung des Rauminhaltes für den Pyramidenstumpf erfolgt nach der Formel:

$$V = \left(\frac{G + g + \sqrt{G \cdot g}}{3}\right) \cdot h$$

Diese Formel erhalten wir mit Hilfe der Formel für den Rauminhalt der Pyramide, wenn wir, ohne Zahlen einzusetzen, von der ganzen Pyramide die Spitzenpyramide abziehen und dann die Gleichung durch entsprechende Umformungen vereinfachen. G ist der Flächeninhalt der Grundfläche und g der Flächeninhalt der Deckfläche.

92. Beispiel: Das Gewicht des in Abb. 56 dargestellten gußeisernen Fundamentankerklotzes ist zu berechnen. (Wichte für Gußeisen $\gamma = 7{,}3$ kg/dm³.)

Rechnungsgang: Die Grundform des Klotzes ist ein Pyramidenstumpf mit der Grundfläche $G = 0{,}8^2 = 0{,}64$ dm² und der Deckfläche $g = 0{,}5^2 = 0{,}25$ dm². Der Rauminhalt wird errechnet nach der Formel $V_1 = \frac{G + g + \sqrt{G \cdot g}}{3} \cdot h.$

Von dem errechneten Rauminhalt sind abzuziehen:

a) Der Rauminhalt eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 20$ mm und der Höhe $h = 50 - 20 = 30$ mm nach der Formel $V_2 = d^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot h$ und

b) der Rauminhalt einer quadratischen Säule nach der Formel $V_3 = a^2 \cdot h$.

Der Rauminhalt des Klotzes ist dann $V = V_1 - V_2 - V_3$ und sein Gewicht $Q = V \cdot \gamma$.

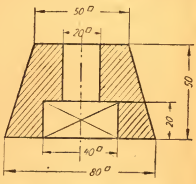


Abb. 56 Fundamentankerklotz

Lösung: $V_1 = \frac{0{,}80^2 + 0{,}50^2 + \sqrt{0{,}64 \cdot 0{,}25}}{3} \cdot 0{,}50$

$= \frac{0{,}64 + 0{,}25 + 0{,}40}{3} \cdot 0{,}50 = \frac{1{,}29}{3} \cdot 0{,}50 = 0{,}215 \text{ dm}^3$

$V_2 = 0{,}2^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}3 = 0{,}009 \text{ dm}^3$

$V_3 = 0{,}4^2 \cdot 0{,}2 \quad = 0{,}032 \text{ dm}^3 \qquad = 0{,}041 \text{ dm}^3$

Rauminhalt des Klotzes: $V = 0{,}174 \text{ dm}^3$

Gewicht des Klotzes: $Q = 0{,}174 \cdot 7{,}3 = 1{,}27 \approx 1{,}3$ kg

Der Fundamentankerklotz wiegt also 1,3 kg.

Für überschlägige Rechnungen kann der Rauminhalt des Pyramidenstumpfs und des Obelisken ermittelt werden aus der Formel:

Rauminhalt
= Querschnittsfläche in halber Höhe × Höhe des Stumpfs.

So wie bei der Pyramide die Mantelfläche als Summe der Dreiecksfläche berechnet wird, aus denen sich der Mantel zusammensetzt, wird ähnlich bei dem Pyramidenstumpf und dem Obelisken die Mantelfläche als Summe der Trapeze bestimmt.

Der Kegelstumpf

Die Aufgabe, den Rauminhalt oder auch den Mantel eines Kegelstumpfes zu berechnen, kommt in der Praxis häufig vor. Behälter haben oft die Form eines abgeschnittenen Kegels (Abb. 57).

Die Formel für die genaue Bestimmung des Rauminhalts des Pyramidenstumpfs $V = \frac{(G + g + \sqrt{G \cdot g}) \cdot h}{3}$ gilt auch für den Kegelstumpf. Man setzt für G den Flächeninhalt des Grundkreises $\frac{D^2 \cdot \pi}{4}$ und für g den Flächeninhalt des Deckkreises $\frac{d^2 \cdot \pi}{4}$ und erhält die Formel:

$$V = \frac{\left(\frac{D^2 \cdot \pi}{4} + \frac{d^2 \cdot \pi}{4} + \sqrt{\frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}}\right) \cdot h}{3} = \frac{\left(\frac{D^2 \cdot \pi}{4} + \frac{d^2 \cdot \pi}{4} + \frac{D \cdot d \cdot \pi}{4}\right) \cdot h}{3}$$

$$= \frac{(D^2 + d^2 + D \cdot d) \cdot \pi \cdot h}{3 \cdot 4}$$

$$\boxed{V = \frac{(D^2 + d^2 + D \cdot d) \cdot \pi \cdot h}{12}}$$

Abb. 57 Behälter

93. Beispiel: Ein Behälter hat die in Abb. 58 dargestellten Abmessungen. Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

Rechnungsgang: Der Behälter setzt sich aus einem Zylinder und einem Kegelstumpf zusammen. Die Summe der beiden Rauminhalte ist das Fassungsvermögen des Behälters:

Lösung: Rauminhalt des Oberteils (Zylinder): $\frac{3{,}50^2 \cdot 3{,}14}{4} \cdot 1{,}80 =$ 17,32 m³

Rauminhalt des Unterteils (Kegelstumpf):

$\frac{(3{,}50^2 + 2{,}00^2 + 3{,}50 \cdot 2{,}00)\ 3{,}14 \cdot 0{,}70}{12} =$ 4,26 m³

Fassungsvermögen des Wasserbehälters: 21,58 m³

Der Wasserbehälter faßt **21,58 m³.**

Die Abwicklung des Kegelstumpfmantels (Abb. 59) zeigt, daß die Mantelfläche ein Kreisringstück ist. Die Länge des unteren Bogenstückes ist $B = D \cdot \pi$ und die des oberen $b = d \cdot \pi$. Die Breite des Ringstückes ist gleich der Mantellinie s. Den Flächeninhalt berechnen wir nach der Formel für die Trapezfläche, denn so wie der Flächeninhalt des Kreisausschnittes als Dreiecksfläche berechnet werden kann, kann der Flächeninhalt des Kreisringstückes als Trapezfläche berechnet werden. Der Flächeninhalt des Kegelstumpfmantels ist demnach:

$$M = \frac{D \cdot \pi + d \cdot \pi}{2} \cdot s, \text{ umgeformt}$$

$$\boxed{M = \frac{D + d}{2} \cdot \pi \cdot s}$$

Abb. 58 Behälter

Abb. 59 Kegelstumpfmantel

Abb. 60 Reflektor

94. Beispiel: Das Gewicht von 600 Blechreflektoren mit den Abmessungen nach Abb. 60 soll berechnet werden. (Blechdicke 0,6 mm, Wichte $\gamma = 7{,}8$ g/cm³.)

Rechnungsgang: Jeder Reflektor wird aus einem Prisma gebogen, dessen Grundfläche der Mantel des Kegelstumpfs und dessen Höhe gleich der Blechdicke ist. Nehmen wir den Rauminhalt des Prismas mit der Wichte mal, so erhalten wir das Gewicht eines Reflektors.

Lösung: Rauminhalt des Blechs für einen Reflektor:

$$V = \frac{22 + 6}{2} \cdot \pi \cdot 9{,}5 \cdot 0{,}06 = 25{,}1 \text{ cm}^3$$

Gewicht eines Reflektors: $G_0 = 25{,}1 \cdot 7{,}8 \approx 196$ g

Gewicht von 600 Reflektoren: $G = \frac{196 \cdot 600}{1000} \approx 118$ kg

600 Reflektoren wiegen also **118 kg.**

Naturlehre

Von der Raumausdehnung der Körper durch Wärme

Die Wärme beeinflußt nicht nur die Längen-, sondern auch die Raumausdehnung der Körper. Unter Raumausdehnung versteht man die Vergrößerung des Rauminhaltes durch die Wärme. Sie erfolgt nach demselben Gesetz wie die Längenausdehnung bei Stäben. Nur tritt an die Stelle der linearen Ausdehnungszahl die Raumausdehnungszahl, die man auch kubischen Ausdehnungskoeffizient nennt.

Erwärmt man einen Würfel von 1 m^3 Rauminhalt um 1°, so dehnt er sich nach drei Richtungen aus, und zwar jede Kante um die Längenausdehnungszahl α. Sein neues Volumen ist also $(1 + \alpha)^3$ m^3. Zieht man davon das ursprüngliche Volumen ab, so erhält man:

$$\text{Zuwachs} = (1 + \alpha)^3 - 1$$
$$= 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3 - 1$$

Die Zahl α ist so klein, daß α^2 und α^3 vernachlässigt werden können. Also:

$$\text{Zuwachs} = 1 + 3\alpha - 1$$
$$= 3\alpha \; [m^3]$$

Der Zuwachs eines Würfels von 1 m^3 Rauminhalt beträgt bei Erwärmung um 1° also 3α m^3.

Wie wir oben gesagt haben, versteht man unter der Raumausdehnungszahl die Zahl, die angibt, um wieviel sich ein Körper bei Erwärmung um 1° ausdehnt. Diese Zahl bezeichnet man in der Technik mit dem Buchstaben γ. Es ist also $\gamma = 3\alpha$. In Worten: Die Raumausdehnungszahl γ ist das Dreifache der Längenausdehnungszahl α.

Wie groß ist die Ausdehnung eines Körpers mit dem Volumen V, wenn er um t° erwärmt wird?

Bei der Erwärmung um 1° dehnt er sich um $V \cdot \gamma$ aus. Bei Erwärmung um t° ist die Ausdehnung dann: $V \cdot \gamma \cdot t$

Hat der Körper nach der Erwärmung den Rauminhalt V_2, so ist:

$$V_2 = V_1 + V_1 \cdot \gamma \cdot t$$

oder:

$$\boxed{V_2 = V_1 (1 + \gamma t)}$$

Bei Abkühlung tritt umgekehrt eine Verkleinerung des Volumens ein. Es ist:

$$V_2 = V_1 - V_1 \cdot \gamma \cdot t$$

oder:

$$\boxed{V_2 = V_1 (1 - \gamma t)}$$

95. Beispiel: Ein geeichtes Glasgefäß trägt die Aufschrift: 20°, 25 cm^3. Wieviel cm^3 faßt das Glas bei 80° ($\alpha = 0{,}0000085$)?

$$V_2 = V_1 (1 + \gamma t) = V_1 [1 + \gamma (t_2 - t_1)]$$
$$= 25 [1 + 3 \cdot 0{,}0000085 (80 - 20)]$$
$$= 25 [1 + 0{,}0000255 \cdot 60]$$
$$= 25{,}038 \text{ cm}^3$$

Das Glasgefäß faßt bei 80° also **25,038 cm^3.**

Während die Raumausdehnung der festen Körper gering ist, dehnen sich Flüssigkeiten bei Erwärmung stärker aus. Füllt man ein Gefäß mit einer Flüssigkeit und verschließt es, so platzt es, wenn die Erwärmung einen gewissen Grad überschritten hat. Flüssigkeiten lassen sich nicht zusammendrücken. Um das Platzen zu verhindern, läßt man über der Flüssigkeit einen Luftraum stehen. Luft ist zusammendrückbar.

Übungsaufgabe

31) Ein Glasgefäß trägt die Aufschrift: 100 cm^3 bei 20°. Wie groß ist das Fassungvermögen, wenn das Glas auf 80° erwärmt wird? Für Glas ist $\alpha = 0{,}0000081$ und $\gamma = 3\,\alpha$.

Ausdehnung der Flüssigkeiten

Die Raumausdehnungszahl γ für Flüssigkeiten bestimmt man nach dem Überlaufverfahren. Man füllt zu diesem Zwecke ein Gefäß mit der Flüssigkeit voll, bringt es auf eine um $t°$ höhere Temperatur und fängt die überlaufende Flüssigkeit auf. Ist G das Gewicht der Flüssigkeit vor der Messung und G_1 das Gewicht der überlaufenden Menge, γ die Ausdehnungszahl der Flüssigkeit, so ist $G_1 = G \cdot \gamma \cdot t$; daraus errechnet sich γ zu

$$\gamma = \frac{G_1}{G \cdot t}$$

Statt die Gewichte festzustellen, kann man auch die Rauminhalte der Flüssigkeiten messen. Ist V der Rauminhalt der Flüssigkeit vor der Messung, $V_ü$ der Rauminhalt der überlaufenden Flüssigkeit, so ist $V_ü = V \cdot t \cdot \gamma$. Hierbei ist die Ausdehnung des Gefäßes nicht berücksichtigt worden.

Innerhalb der gewöhnlichen Temperaturen dehnen sich Flüssigkeiten fast regelmäßig aus, so daß die Raumausdehnung der Temperaturänderung proportional ist. Bei sehr hohen und sehr tiefen Temperaturen ergeben sich jedoch für γ andere Werte. Die Raumausdehnungszahlen sind also von der jeweiligen Temperatur abhängig.

Raumausdehnungszahlen für Flüssigkeiten bei gewöhnlicher Temperatur

Stoff	Zahl	Stoff	Zahl
Äther	0,00062	Quecksilber	0,00018
Alkohol	0,00010	Wasser	0,00018
Benzol	0,00024	Glyzerin	0,00050

Vergleichen wir diese Werte mit den Ausdehnungszahlen fester Körper, wie sie in technischen Taschenbüchern zu finden sind, so erkennen wir, daß sich Flüssigkeiten stärker ausdehnen als feste Körper.

Im Gegensatz zu den anderen Flüssigkeiten ist die Ausdehnung des Wassers nicht regelmäßig. Wasser zieht sich beim Erkalten bis 4° zusammen, dehnt sich aber bei weiterer Abkühlung wieder aus. Es hat

also nicht beim Gefrierpunkt, sondern bei 4° das kleinste Volumen und seine größte Wichte. Das Gewicht von 1 dm³ bei Temperaturen von 0—30° ersieht man aus umseitiger Tabelle. Daß sich Wasser bei Temperaturschwankungen unregelmäßig ausdehnt, kann man durch folgenden Versuch nachweisen (Abb. 61). In das Gefäß *G*, das mit Wasser gefüllt ist, tauchen wir ein Thermometer *Th* und ein dünnes Rohr *R*. Beide werden zur Erzielung einer guten Abdichtung mit Wachs vergossen. Seitlich ist ein Tauchkolben T_k angebracht, mit dem man den Wasserspiegel im Rohr *R* einstellen kann. Man bringt das Wasser auf eine Temperatur von 10° und kühlt es dann Grad um Grad bis auf 0° ab. Das Rohr *R* ist seitlich 11mal herausgezeichnet und der jeweilige Wasserstand eingetragen. Auf der Waagerechten sind die den Wasserständen zugeordneten Temperaturen aufgezeichnet. Verbindet man die Wasserspiegel miteinander, so entsteht eine Kurve, die bei 4° den tiefsten Punkt hat. Erwärmt man das Wasser über 10°, so verläuft die Verbindungslinie fast gerade.

°C	Gewicht in g
0	999,8
2	999,9
4	1000
6	999,9
8	999,8
10	999,7
20	999,2
30	995,6

Wir führen nun denselben Versuch mit Quecksilber durch und bringen mit Hilfe des Tauchkolbens T_k den Quecksilberspiegel im Rohr *R* auf dieselbe Höhe, die das Wasser bei 0° hatte. Überträgt man jetzt bei fortschreitender Erwärmung die Höhe der Quecksilbersäule auf das Rohrsystem, so entsteht durch Verbindung der Höhen eine gerade Linie. Im Gegensatz zum Wasser ist die Ausdehnung des Quecksilbers regelmäßig, d. h. sie nimmt bei jedem Grad Temperatursteigerung um den gleichen Betrag zu (in Abb. 61 mit *a* bezeichnet).

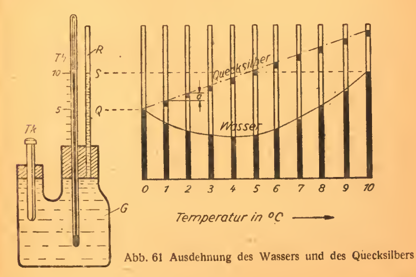


Abb. 61 Ausdehnung des Wassers und des Quecksilbers

Mit einem guten Thermometer können wir auch folgenden Versuch machen. In ein Gefäß mit Wasser werfen wir zerkleinertes Eis und Schnee (Abb. 62). Beide schwimmen auf dem Wasser, weil sie leichter sind. Ist ein Teil des Eises oder Schnees geschmolzen, so bringen wir das Thermometer so mitten ins Eis, daß man die Quecksilbersäule noch gerade ablesen kann. Nach einiger Zeit zeigt das Thermometer 0° an. Halten wir dagegen das Thermometer unter das Eis in die Nähe des Bodens, so stellt es sich auf 4° ein. Dieser Versuch zeigt uns, daß Wasser von 4° schwerer ist als Wasser von 0°.

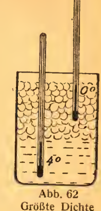


Abb. 62
Größte Dichte des Wassers

Die Tatsache, daß das Verhalten des Wassers beim Erwärmen eine Ausnahme unter allen Flüssigkeiten bildet, ist im Leben der Natur von sehr großer Bedeutung. So kommt es, daß die Wasserteilchen in Seen und Gewässern bei Abkühlung bis auf 4° nach unten sinken und bei weiterer Abkühlung wieder nach oben steigen und dort zu Eis erstarren. Deshalb frieren die Gewässer stets von oben zu. Diese Abweichung im Verhalten des Wassers bei Temperaturänderung ist für Wassertiere und Wasserpflanzen sehr wichtig, weil sie andernfalls zugrunde gehen müßten. Eine Berücksichtigung der Ausdehnung des Wassers durch Erwärmung finden wir auch bei technischen Anlagen. So haben z. B. Warmwasserheizungen ein Ausdehnungsgefäß mit Überlauf, um die Volumenvergrößerung des Wassers aufzunehmen.

Ausdehnung der Gase

Die gasförmigen Körper dehnen sich bei Erwärmung stärker und regelmäßiger aus als alle übrigen Körper. Die Ausdehnung ist für alle Gase fast gleich. Der mittlere Wert der Raumausdehnungszahl aller Gase beträgt:

$$\gamma = \frac{1}{273} = 0{,}00367$$

Bei Gasen beeinflußt jedoch der Druck das Volumen des Gases sehr stark. Wollen wir also die Raumausdehnung der Gase betrachten, so müssen wir dafür sorgen, daß der darauf lastende Druck gleich bleibt. Hierzu diene die Versuchsanordnung nach Abb. 63 und 64.

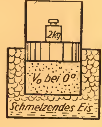


Abb. 63
Gasvolumen bei 0°

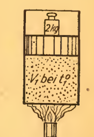


Abb. 64 Gasvolumen bei t_1° unter gleichem Druck wie in Abb. 63

Die räumliche Ausdehnung der Gase bei gleichbleibendem Druck wird durch dieselbe Gleichung ausgedrückt wie die Ausdehnung fester oder flüssiger Körper. Dabei müssen wir beachten, daß wir immer von dem Volumen V_0 des Gases bei 0° ausgehen müssen, um ein anderes Volumen V_1 bei t_1° zu berechnen (Abb. 64). Demnach ist das Volumen V_1 eines Gases bei Erwärmung von 0° auf t_1°:

$$V_1 = V_0 + V_0 \cdot \gamma \cdot t_1$$

oder:

$$V_1 = V_0 (1 + \gamma \cdot t_1)$$

Setzt man für $\gamma = 0{,}00367 = \frac{1}{273}$, so erhält man:

$$\boxed{V_1 = V_0 \left(1 + \frac{t_1}{273}\right)}$$

Diese Zustandsgleichung der Gase nennt man das Gay-Lussacsche Gesetz (sprich Gä-Lüssack).

Kühlt man umgekehrt eine Gasmenge von Grad zu Grad ab, so zieht sich ihr Volumen V_0 um je $\frac{1}{273}$ zusammen. Daraus müßte folgen, daß bei einer Abkühlung auf —273° das Gas überhaupt kein Volumen mehr hätte, also auch keinen Druck mehr ausüben würde (Abb. 65). Man

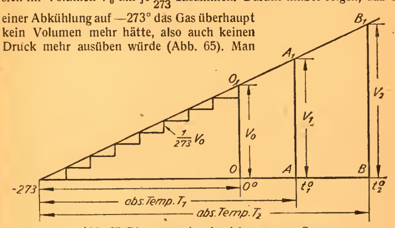


Abb. 65 Diagramm der Ausdehnung von Gasen

folgert daraus, daß —273° die tiefste Temperatur ist und nennt sie den absoluten Nullpunkt der Temperatur. Die absolute Teilung rechnet von diesem Punkt aus. Man nennt diese Temperatur a b s o l u t e T e m p e r a t u r T.

Zum Nachweis seines Gesetzes brachte Gay-Lussac in ein Ölbad waagerecht ein Thermometerrohr, dessen Luftinhalt durch einen Quecksilbertropfen abgesperrt wird (Abb. 66). Für jeden Grad der Erwärmung ergab sich eine Ausdehnung von $\frac{1}{273}$ des Volumens V_0 bei 0°.

Die Gleichung $V_1 = V_0 \left(1 + \frac{t_1}{273}\right)$ umgeformt ergibt:

$$V_1 = V_0 \left(\frac{273 + t_1}{273}\right).$$

Setzt man für $273 + t_1 = T_1$ und für $273 = T_0$, so erhält man $V_1 = V_0 \frac{T_0}{T_1}$ oder:

$$\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_0}{T_0}}$$

Danach lautet das Gesetz von Gay-Lussac: Bei gleichbleibendem Druck verhalten sich die Rauminhalte einer Gasmenge wie die zugehörigen absoluten Temperaturen, d. h. die Rauminhalte wachsen entsprechend der Temperaturerhöhung.

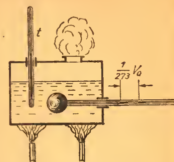


Abb. 66 Versuchsanordnung zur Bestimmung der Ausdehnungszahl von Gasen

Übungsaufgabe

32) In einem Winderhitzer werden stündlich 120 m³ Luft von 0° auf 800° erhitzt. Wieviel m³ erhitzte Luft liefert die Anlage?

Wärmemenge

Gießen wir 1 kg (1 Liter) Wasser von 100° mit 1 kg Wasser von 20° zusammen und messen nach guter Durchmischung die Temperatur, so stellen wir fest, daß das Wasser die Temperatur von 60° angenommen hat. Das wärmere Wasser hat einen Teil seines Wärmeinhaltes, d. h. seiner in ihm steckenden Wärmemenge, an das kältere Wasser abgegeben. Um die Gesetzmäßigkeit zu erkennen, nach der der Temperaturausgleich erfolgt, ist die Einführung einer Einheit für die Wärmemenge notwendig. Als Wärmeeinheit (kcal) gilt die Wärmemenge, die 1 kg Wasser um 1° erhöht (genauer von 14,5 auf 15,5°). Diese Wärmeeinheit heißt Kilogramm-Kalorie (kcal). Der tausendste Teil der Kilogramm-Kalorie heißt Grammkalorie (cal). Diese erwärmt 1 g Wasser (= 1 cm³) um 1°. Wir rechnen in technischen Aufgaben nur mit kcal. Machen wir jetzt einen weiteren Versuch und gießen 3 kg Wasser von 80° mit 5 kg von 16° zusammen. Die Mischtemperatur, die sich hierbei ergibt, errechnen wir auf folgende Weise. 1 kg Wasser von 80° hat einen Wärmeinhalt von 80 kcal. Dann haben 3 kg einen solchen von $3 \cdot 80 = 240$ kcal. Demgemäß haben 5 kg von 16° eine Wärmemenge von $5 \cdot 16 = 80$ kcal. Beim Mischen verteilt sich die Gesamtwärme von $240 + 80 = 320$ kcal auf die gesamte Wassermenge von $3 + 5 = 8$ kg, so daß jedes Kilo-

gramm eine Wärmemenge von $\frac{320}{8} = 40$ kcal hat. Da bei einem Kilogramm Wasser die Zahlenwerte für den Wärmeinhalt in kcal und Temperatur gleich sind, hat das Wasser nach der Mischung eine Temperatur von 40°.

Die einer bestimmten Wassermenge G zugeführte Wärmemenge A läßt sich folgendermaßen berechnen:

Zuzuführende Wärmemenge = Gewicht · Temperaturänderung,

oder:

$$A = G \cdot t \text{ [kcal]}$$

Die Mischtemperatur t_m mehrerer Wassermengen von verschiedenem Wärmeinhalt ermittelt man, indem man die Wärmemengen A_1, A_2 usw. zusammenzählt und durch die zugehörigen Gewichte dividiert. Also

$$t_m = \frac{A_1 + A_2}{G_1 + G_2}.$$

Die spezifische Wärme

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt 1 kg Wasser von 100° mit 1 kg Wasser von 20° zusammengebracht und nach guter Durchmischung eine Temperatur von 60° festgestellt. Bringen wir nun 1 kg Eisen, das vorher in kochendem Wasser auf 100° erwärmt wurde, mit 1 kg Wasser von 20° zusammen, so machen wir die überraschende Feststellung, daß sich das Wasser nur um etwa 8° erwärmt, obwohl die Gewichte beider Stoffe gleich waren. Die Temperatur des Eisens sinkt dabei um über 70°.

Wir stellen also fest, daß die Produkte aus Gewicht mal Temperaturänderung nicht gleich sind, sobald es sich um verschiedene Stoffe handelt. Die Wärmemenge, die das Wasser aufgenommen hat, beträgt für jeden Grad Temperaturerhöhung 1 kcal, also insgesamt 8 kcal. Diese Wärmemenge ist von dem Eisen abgegeben worden, wobei die Temperatur des Eisens von 100° auf 28°, d. h. um 72°, gesunken ist. Für 1° Temperaturerniedrigung hat das Eisen demnach nur $\frac{8}{72} = 0{,}11$ kcal abgegeben.

Diesen Zahlenwert nennt man **spezifische Wärme** des Eisens. Er gibt an, wieviel Wärme in kcal dem Eisen zugeführt werden müssen, um die Temperatur um 1° zu erhöhen, bzw. wieviel kcal vom Eisen abgegeben werden, wenn die Temperatur um 1° gesenkt wird. Man bezeichnet die spezifische Wärme mit dem Formelbuchstaben c. Allgemein sagt man: **Die spezifische Wärme c eines Stoffes ist die Wärmemenge, die 1 kg dieses Stoffes um 1° erwärmt.** Vergleicht man die spezifischen Wärmen der verschiedenen Stoffe miteinander, so stellen wir fest, daß sie für Metalle niedrig sind (vgl. nachstehende Tabelle). Wasser hat von allen festen und flüssigen Stoffen die größte spezifische Wärme. Soll die Formel

$Q = G \cdot t$ für alle Stoffe Gültigkeit haben, so muß die rechte Seite noch mit der spezifischen Wärme c multipliziert werden, also:

$$Q = G \cdot c \cdot t$$

Wärmemenge = Gewicht · spezifische Wärme · Temperaturänderung.

Spezifische Wärme fester und flüssiger Körper zwischen 0° und 100°					
Wasser	1,000	Glas	0,19	Silber	0,056
Alkohol	0,58	Eisen	0,115	Quecksilber	0,033
Aluminium	0,21	Nickel	0,106	Platin	0,032
Antimon	0,05	Kupfer	0,094	Holz	0,57
Benzol	0,44	Messing	0,092	Glyzerin	0,58

Die spez. Wärme für Wasser ist gleich eins, d. h. um 1 kg Wasser um 1° zu erhöhen, ist 1 kcal erforderlich.

96. Beispiel: Welche Wärmemenge nimmt ein 15 kg schwerer Kupferkessel auf, wenn er von 15° auf 100° erwärmt wird ($c = 0{,}094$)?

Lösung:
$$A = G \cdot c \cdot t$$
$$= 15 \cdot 0{,}094 \cdot 85$$
$$A = 119{,}85 = 120 \text{ kcal}$$

Die aufgenommene Wärmemenge beträgt **120 kcal.**

Der Begriff der spezifischen Wärme spielt in der Lehre der Gase und Dämpfe eine große Rolle. Er ist nicht rein theoretischer Art, sondern dient in der Praxis dazu, bei Dampfmaschinen, Verbrennungskraftmaschinen, Kompressoren und Kältemaschinen die rechnerischen Grundlagen für die Ermittlung der Leistung und des Kraftverbrauches zu schaffen. Dadurch sind aber wieder die Voraussetzungen für die konstruktive Gestaltung und die Berechnung der Hauptabmessungen dieser Maschinen und deren Einzelteile gegeben. Im täglichen Leben tritt die Bedeutung der spezifischen Wärme sinnfällig nicht so sehr in Erscheinung.

Übungsaufgabe

33) 6 kg Alkohol werden von 15° auf 65° erwärmt. Welche Wärmemenge ist erforderlich, wenn die spez. Wärme $c = 0{,}08$ beträgt?

Verdampfung

Beim Erhitzen einer Flüssigkeit steigt deren Temperatur fortgesetzt bis zum Sieden oder Kochen und hält sich dann trotz noch so starker weiterer Wärmezufuhr auf gleichbleibender Höhe, während unausgesetzt innerhalb der ganzen Flüssigkeit Gasblasen entstehen und in die auf dem Flüssigkeitsspiegel ruhende Luft entweichen. Diese als Dampf bezeichneten Blasen

überwinden dabei den äußeren Luftdruck vermöge der ihnen während der Verdampfung erteilten inneren Spannung und leisten eine aus der zugeführten Wärme entnommene Arbeit. Die erreichte Temperatur heißt Siedetemperatur oder Siedepunkt. Sie ist für die einzelnen Stoffe verschieden und arteigen. Angaben darüber können technischen Tabellen entnommen werden. Zur Kennzeichnung des Temperaturbereiches, in dem Verdampfungen vorkommen, seien einige Beispiele genannt:

Wasser	100°	Phosphor	290°
Äther	35°	Quecksilber	356,7°
Flüssige Kohlensäure	— 78°	Blei	1690°
Flüssiger Stickstoff	— 196°	Kupfer	2340°
Flüssiger Wasserstoff	— 240°	Eisen	2500°

Ändert sich der auf dem Flüssigkeitsspiegel lastende äußere Druck, so ändert sich auch die Siedetemperatur. Im Gebirge siedet das Wasser infolge des dort herrschenden geringeren Luftdruckes schon bei tieferen Temperaturen als in Höhe des Meeresspiegels (z. B. auf dem Großglockner, 3800 m hoch, bei 87°, auf dem Montblanc, 4810 m hoch, bei 84°).

Umgekehrt kann durch künstliche Erhöhung des äußeren Druckes auf die Flüssigkeit der Siedepunkt gesteigert werden. Wir wissen, daß in den Dampfkesseln hochgespannter Dampf für verschiedenste Zwecke erzeugt werden kann. Je nach Einstellung des zugehörigen Dampfdrucksicherheitsventils ist auch die Siedetemperatur verschieden hoch. Die Verdampfungstemperatur des Wassers ist z. B. bei 16 kg/cm² 200°, bei 87,5 kg/cm² 300° und bei etwa 214 kg/cm² 370°.

Zur Untersuchung des Siedepunktes bei höherem Druck dient der „Papinsche Topf“, ein druckdicht verschraubtes Gefäß mit einem für verschiedene Dampfdrücke, z. B. durch Gewichtsbelastung, einstellbaren Abblaseventil und Thermometer, sowie Manometer zur Messung des durch Temperatur und Druck bestimmten Dampfzustandes. Ähnliche Geräte benutzt man zum wirksameren Kochen bei erhöhter Temperatur in den verschiedensten Betrieben, u. a. auch im Haushalt als Schnellkocher, in Leimfabriken zum Auskochen der Knochen, in Papierfabriken zum Kochen der Lumpen.

Die Abhängigkeit der Verdampfung von dem auf der Flüssigkeit lastenden Drucke wird auch z. B. beim Betrieb von feuerungslosen Lokomotiven ausgenutzt. Der Kessel enthält Kesselspeisewasser, das durch Einleiten von hocherhitztem Dampf unterhalb des Wasserspiegels auf die dem herrschenden Druck entsprechende Siedetemperatur erwärmt wird (Laden der Lokomotive). Bei Beendung des Ladevorganges hat der gesamte Kesselinhalt die im Betriebe erforderliche Verdampfungstemperatur angenommen. Doch kann bei noch fehlendem Dampfverbrauch infolge des im Kessel herrschenden Drucks auf die Verdampfungsflüssigkeit noch keine Verdampfung erfolgen, da er der inneren Spannung des im Entstehen begriffenen Dampfes entgegenwirkt. Im Augenblicke der späteren Dampf-

entnahme sinkt der Kesseldruck erheblich und die dem hocherhitzten Kesselinhalt innewohnende innere Dampfspannung gewinnt die Überlegenheit, so daß sogleich eine lebhafte Dampfentwicklung einsetzt. Bei Abstellung der Dampfentnahme sammelt sich zunächst der noch entstehende Dampf unter Druckanstieg im Kessel, bis seine Weiterentwicklung als Folge des Druckanstieges aufhört.

Die äußeren Erscheinungsformen des Verdampfungsvorganges ergeben folgenden Gesamtüberblick:

1) Nach Erwärmung der zu verdampfenden Flüssigkeit auf die ihr eigene Siedetemperatur erfolgt während weiterer Wärmezufuhr die unausgesetzte Dampfbildung, ohne daß sich dabei die Siedetemperatur ändert. Diese bleibt vielmehr bis zur Verdampfung des letzten Flüssigkeitsteilchens bestehen.

2) Die für die einzelnen Stoffe geltenden Siedepunktsangaben beziehen sich auf das gleichzeitige Vorhandensein eines Normaldruckes von 760 Torr[1].

3) Eine Änderung des auf der zu verdampfenden Flüssigkeit lastenden äußeren Druckes hat auch eine Änderung der Siedetemperatur zur Folge. Hierbei lassen sich folgende Gegenüberstellungen machen:

Durch Minderung (Steigerung) des auf einer verdampfenden Flüssigkeit ruhenden Außendrucks kann die Verdampfung erhöht (unterdrückt) werden. Druckminderung gegenüber einer noch nicht siedenden Flüssigkeit kann bei Erreichung des zur bestehenden Temperatur gehörenden inneren Verdampfungsdruckes zur Verdampfung führen.

Durch entsprechende Abkühlung (Nacherhitzung) auf die zum geminderten (gesteigerten) Druck passende tiefere (höhere) Verdampfungstemperatur kann die Verdampfung wieder unterbunden (eingeleitet) werden.

Eine schon unter bestimmtem äußeren Druck siedende Flüssigkeit kann durch künstliche Steigerung (Senkung) dieses Druckes zu einer entsprechend langsamer (stürmischer) verlaufenden Dampfentwicklung angeregt werden. (Gefahr bei Dampfkesselexplosionen!)

Die inneren Zusammenhänge bei der Verdampfung einer Flüssigkeit zwingen zur Unterscheidung der „Flüssigkeitswärme" von der reinen „Verdampfungswärme". Unter Flüssigkeitswärme wird diejenige Wärme verstanden, die der Flüssigkeit bei Erreichung ihres Siedepunktes innewohnt. Je nach dem Unterschied zwischen Ausgangstemperatur und Siedetemperatur muß der Flüssigkeit vor dem Eintritt in das Sieden die an der Temperatursteigerung fehlende Wärme von außen zugeführt werden. Erst mit Erreichung des Siedepunkts durch die Vorwärmung der Flüssigkeit kann bei weiterer Wärmezufuhr die Verdampfung einsetzen. Da die Siedetemperatur während der fortschreitenden Verdampfung immer die gleiche bleibt, falls der äußere Druck nicht geändert wird, so dient die Verdampfungswärme einmal der Lockerung der siedenden Flüssigkeitsteilchen aus dem

[1] Ein Torr = 1 mm Q.-S. bei 0°.

Verband der übrigen Teilchen (innere Verdampfungswärme) und zum andern zur Herbeiführung der Raumvergrößerung (äußere Verdampfungswärme).

Der Verdampfungsvorgang ist auch in seiner Umkehrung als Rückverflüssigung (Kondensation) in entsprechender Weise aufzufassen. Demnach können Dampfteilchen erst durch Wärmeentzug unter Temperatursenkung aus ihrer Losgerissenheit zur Wiedervereinigung als Flüssigkeit gezwungen werden. Die gleiche Wärmemenge, die als Verdampfungswärme ihre Trennung als freie Gasteilchen bewirkt, muß ihnen zur Verflüssigung entzogen werden. Nach diesem Gesetz wird in Dampfbetrieben der Maschinenabdampf im Kondensator zur Wärmeabgabe an das getrennt geführte Kühlwasser gezwungen. Als Kondensat verläßt der niedergeschlagene Abdampf den Kondensator, um auf dem Wege über die Kesselspeisewasserpumpen wieder dem Kesselbetrieb zugeführt zu werden und den Kreislauf erneut zu beginnen. Die Verdampfungswärme oder die ihr unter gleichen Bedingungen gleiche Kondensatabwärme umfaßt bei gewöhnlichem Luftdruck (1 kg/cm²) den erheblichen Wert von 540 kcal/kg. Bei höheren Drücken bzw. Temperaturen ist der Wert kleiner, beträgt jedoch bei etwa 16 kg/cm² und 200° Sattdampf noch 467,5 kcal/kg. Bei tieferen Drücken, d. h. bei Unterdruck (Vakuum) ist die Verdampfungswärme des Wassers größer, z. B. bei etwa 0,043 kg/cm² und zugehörig 30° etwa 579 kcal/kg.

Die Verdampfungswärme wird als die zur restlosen Verdampfung eines Kilogramms Flüssigkeit von Siedetemperatur erforderliche Anzahl von Kilogrammkalorien verstanden. Als Begriff ist die Verdampfungswärme der Schmelzwärme zu vergleichen, die den Bedarf in kcal/kg zum Schmelzen von 1 kg eines erstarrten Stoffes angibt und z. B. für Eis 80 kcal/kg erfordert.

Beispiel: Wenn 1 kg Wasser von 10° zum Kochen gebracht wird, werden zunächst $100 - 10 = 90$ kcal verbraucht, um die Siedetemperatur von 100° zu erreichen. Die restlose Verdampfung für 1 kg Wasser von 100° verlangt 540 kcal. Der Gesamtverbrauch ist daher $90 + 540 = 630$ kcal.

Wäre das Wasser aus Eis durch Einschmelzen gewonnen und dann verdampft, so kämen noch hinzu: 80 kcal für den Schmelzvorgang von 1 kg Eis (0°) in Wasser von 0° sowie 10 kcal für die Erwärmung des Schmelzwassers von 0° auf 10° (Ausgangstemperatur des zuvor betrachteten Falles). Alsdann ergäbe sich der Gesamtwärmebedarf von $80 + 10 + 630 = 720$ kcal.

Wie der Verdampfungswärme die Schmelzwärme als artgleicher Begriff gegenübergestellt wurde, bleibt das noch in entsprechender Weise für deren Gegensätze auszuführen, d. h. für die bei Niederschlagung von 1 kg Dampf frei werdende Kondensatwärme einerseits und die beim Einfrieren von 1 kg Flüssigkeit ebenfalls frei werdende Erstarrungswärme. Beide Wärmebeträge werden in der gleichen Weise in kcal/kg ausgedrückt.

In den Fällen der Verdampfungs- und Schmelzwärme bzw. der Verflüssigungs- (Kondensat-) und Erstarrungswärme spricht man von „gebundener Wärme", deren Merkmal es ist, als Wärmeaufnahme bzw.

Wärmeabgabe zur Lockerung bzw. Festigung des Teilchenverbandes aufzutreten.

In der Dampftechnik spielt das Wasser die bedeutendste Rolle. Dampf ist farblos und völlig durchsichtig. Wenn Wasserdampf unter entsprechendem Schutz gegen äußere Abkühlung durch ein Glasrohr geleitet wird, ist das mit dem Auge nicht wahrzunehmen. Wenn aber einem Kochgefäß „Wasserdampf" entströmt, so scheint das nicht mehr zu stimmen, weil sich weiße „Dampfschwaden" zeigen. Es handelt sich aber hierbei nicht mehr um Dampf schlechthin, sondern um eine Gemisch aus farblosem Wasserdampf und feinverteiltem, durch Abkühlung rückverflüssigtem Wasserdampf, also wieder Wasser. Der wieder flüssig gewordene Anteil der Dampfschwaden verursacht durch Lichtbrechung an den vielen kleinen Wassertröpfchen die weiße Farbwirkung. Der vollständig von solchen Rückverflüssigungen frei gebliebene Dampf wird als „Trockendampf" oder „Sattdampf" bezeichnet, zum Unterschied von dem durch Rückverflüssigung eines Teiles zu „Naßdampf" gewordenen Erzeugnis.

Trockendampf enthält nur reinen Dampf von 100%. Geht er durch Wärmeverlust in ein Naßdampfgemisch über, so pflegt man seinen relativen Feuchtigkeitsgehalt in % anzugeben. So hat z. B. ein Naßdampf von 10% Feuchtigkeit neben den eben genannten 10% „Kondensat" nur noch 90% Sattdampf. Die Beimischung des kondensierten Teiles ändert das Verhalten des Dampfgemisches.

Um von den Nachteilen des leicht kondensierten Sattdampfes möglichst freizukommen, und um den Dampf für technische Zwecke grundsätzlich geeigneter zu machen, wird der Sattdampf in besonderen, von ihm zu durchlaufenden „Überhitzern" bei gleichbleibendem Druck erheblich über seine bei der Verdampfung erreichte Sattdampftemperatur hinaus erhitzt. Der „überhitzte Dampf" zeichnet sich durch geringere Empfindlichkeit gegen Abkühlung aus und bietet auch wärmetechnisch erhebliche Vorteile, so daß seine Verwendung in Dampfbetrieben heute eine Selbstverständlichkeit ist. Überhitzter Dampf gleicht in seinem Verhalten demjenigen reiner Gase, die demnach selbst nur als entsprechend hochüberhitzte Dämpfe aus einer einmal vorangegangenen Verflüssigungsstufe aufzufassen sind. Mit dem Eintritt des überhitzten Dampfes in das Grenzgebiet des Sattdampfes infolge entsprechender Wärmeabgabe nach außen nähert sich auch die Gefahr des Zerfalls in das Naßdampf-Gemisch.

Ein besonderer Teil unserer Betrachtungen sei den Einflüssen des Wasserdampfes auf die Beschaffenheit und die zugehörigen Veränderungsmöglichkeiten der Luft gewidmet.

Die großen Wasseroberflächen von Flüssen, Seen und Meeren schaffen einen Anfangszustand für die Anreicherung der Luft durch Verdunstung sehr erheblicher Wassermengen, das ist eine unter den üblichen Witterungstemperaturen und zugehörigen Luftdrücken zustandegekommene Verdampfung. Der Einfluß der Sonnenstrahlung mit einhergehender Luft- und Bodenerwärmung begünstigt diesen Vorgang.

Die Aufnahmefähigkeit der Luft für verdunstendes Wasser ist, wie aus dem Vorangegangenen ersichtlich, den jeweiligen Vorbedingungen entsprechend sehr verschieden. Hierfür ist zuerst die für verschiedene Lufttemperaturen ebenfalls verschiedene Höchstaufnahmefähigkeit maßgebend, sodann aber auch der schon vor weiterer Verdunstung in der Luft vorhandene Feuchtigkeitsgehalt. So kann z. B. 1 Kubikmeter Luft bei 11° höchstens 10 g Verdunstungswasser aufnehmen, bei 20° 17,3 g. Enthält die Luft unter den angegebenen Temperaturen jeweils geringere Mengen Feuchtigkeit, so bestimmt sich die weitere Aufnahmefähigkeit aus dem Unterschied zwischen Höchstaufnahmefähigkeit und dem jeweiligen Feuchtigkeitsgehalt. Ein Beispiel wird dies anschaulicher machen.

Hat 1 Kubikmeter Luft unter dem Einfluß der Sonnenstrahlung während des Tages bei etwa 20° zuletzt z. B. 15 g Wasserdampf aufgenommen, so muß die gleiche Luftmenge bei ihrer nachfolgenden Abkühlung während der Nachtzeit auf 11° infolge ihrer dadurch auf 10 g Feuchtigkeit abgesunkenen Höchstaufnahmefähigkeit 15 — 10 = 5 g Wasserdampf durch Kondensation als Wassertröpfchen in feinster Verteilung ausscheiden. Je nach den sonstigen Gegebenheiten der Änderungsgeschwindigkeit vom alten zum neuen Zustand erfolgt die Ausscheidung langsam oder stürmisch als Nebel, Wolke, Regen, Schnee oder Hagel in den oberen Luftschichten oder als Tau oder Rauhreif in Erdbodennähe.

Die gleichen Zusammenhänge sind auch bei mancherlei anderen Erscheinungen maßgebend; so fällt z. B. während des Sommers beim Beschlagen eines außen trockenen Weinglases nach Eingießen des zuvor besonders stark gekühlten Weines die Luftfeuchtigkeit aus der Umgebung des Weinglases durch die vom Wein ausgehende Mitkühlung der Luft in feiner Verteilung aus.

Wir erkennen die erhebliche Bedeutung der hier erörterten Zusammenhänge der gesamten Klima- und Wettergestaltung mit ihren weitreichenden Einflüssen z. B. auf die Landwirtschaft bzw. Forstwirtschaft durch ein Zuviel oder Zuwenig von Niederschlägen oder durch jahreszeitlich unpassende Lage der Niederschläge. Wir sehen, wie hierdurch die Verdampfungsvorgänge auf unserem Planeten mittelbar weiterwirken können durch die Gestaltung der Versorgungslage mit Lebensmitteln und Futter. Die gleichen Ursachen können aber auch zurückwirken auf die Entstehung oder das Versiegen von Flußläufen und Seen und weiteren Einfluß nehmen auf die Benutzbarkeit oder das Versagen von Wasserläufen. Darüber hinaus können sich Möglichkeiten ergeben oder ausfallen für die Ausnutzung von Staustufen zur Gewinnung elektrischer Arbeit aus Wasserläufen. Zuletzt zeigt sich bei weiterer Betrachtung, wie bedeutungsvoll das unendliche Spiel zwischen Verdampfung und Niederschlag der Luftfeuchtigkeitsmengen unter Einbeziehung geographischer Weiten für die Umwälzung größter Wassermassen auf der Erde werden kann und wie anderseits der keinesfalls so schicksalgestaltend anmutende Verdampfungsvorgang als noch größerer Mittler eines Arbeitsaustausches zwischen Erde und Sonne wirkt.

Magnetismus und Kompaß

In der kleinasiatischen Stadt Magnesia erregte schon im Altertum ein dort gefundenes Eisenerz Aufsehen, das Eisenstücke anzog und festhielt. Diese Eigenschaft wurde die magnetische genannt; ihr Träger hieß Magnet. Es handelte sich vermutlich um den auch in Norwegen, Schweden und im Ural gefundenen Magneteisenstein. Neben den natürlichen lernte man mit der Entwicklung der Elektrizitätslehre auch künstliche Magnete herstellen, und zwar durch Einwirkung einer stromdurchflossenen Magnetspule auf einen darein gelegten Eisenstab. Dabei zeigte sich das unterschiedliche Verhalten von nichthärtbarem Stahl und Gußeisen einerseits und härtbarem Stahl anderseits. Das führte zur Unterscheidung zwischen Elektromagneten und Dauermagneten.

Die aus nichthärtbarem Stahl und Gußeisen hergestellten Magnete sind nur für die Dauer der Stromeinschaltung magnetisch. Bei Ausschaltung des Stromes hört der Magnetismus ebenso plötzlich auf, als er umgekehrt beim Einschalten erscheint. Man spricht von den Elektromagneten. Durch die Magnetisierung entsteht für die kleinsten Teilchen des Magneten ein Zwangszustand, dem diese bei den nichtgehärteten Stoffen ebenso leicht folgen, wie sie nach Ausschaltung des Stromes wieder davon freikommen. Härtbarer Stahl kann infolge seiner Härte den magnetischen Zustand nur erheblich schwerer annehmen und behält ihn aus dem gleichen Grund auch nach der Stromabschaltung im wesentlichen bei. Die Magnete aus härtbarem Stahl können nach der Magnetisierung aus der Magnetspule herausgenommen und als Dauermagnete weiterbenutzt werden. Durch Mischzusätze bei der Stahlerzeugung gewonnene Edelstähle eignen sich besonders für Dauermagnete. Der z. Zt. beste Werkstoff hierfür ist „Oerstit", eine Stahl-Aluminium-Nickel-Kobalt-Mischung von etwa 600mal größerer magnetischer Härte oder Koerzitivkraft im Vergleich zum nichthärtbaren Stahl. Der nach Stromabschaltung verbliebene magnetische Rückstand heißt Remanenz. Dauermagnete haben daher große Koerzitivkraft und Remanenz, Elektromagnete dagegen entsprechend geringe Werte hierfür. Alle Stoffe haben ein arteigenes Durchlaßvermögen für magnetische Wirkungen, magnetische Leitfähigkeit oder Permeabilität genannt, und setzen im umgekehrten Verhältnis hierzu der magnetischen Durchdringung einen magnetischen Widerstand entgegen. Die unmagnetischen Stoffe haben annähernd die Permeabilität 1 wie Luft; bei den magnetischen Stoffen kann man je nach Art mit hohen Werten bis zum 20000fachen Betrage rechnen.

Ein in der waagerechten Ebene frei beweglicher Magnet schwingt mit einem Ende ungefähr nach Norden ein und hat dort seinen mit einem „N" bezeichneten Nordpol; das andere Ende, der Südpol, würde sich auf der südlichen Erdhälfte ungefähr nach Süden ausrichten. Die nur in Nähe der geographischen Erdpole im Erdinnern gelegenen, von Magneten angesteuerten Zielpunkte heißen magnetischer „Nord-" bzw. „Südpol".

Nach genauer Kenntnis ihrer Lage wurden magnetische Ortsbestimmungen mit der Magnetnadel eines Kompasses möglich. In der waagerechten Ebene zeigt die Magnetnadel als Abweichung gegen die wahre Nordrichtung (Ortslängengrad) den Deklinationswinkel an; wird die Magnetnadel in Deklinationsstellung frei nach unten drehbar aufgestellt, so zeigt sie in die Erde hinein auf den magnetischen „Nord-"Pol und gibt die Neigung dieser Richtung gegen die waagerechte Ebene als Inklinationswinkel an. Für Potsdam ist z. B. die Deklination 4° 10′ westlich und die Inklination

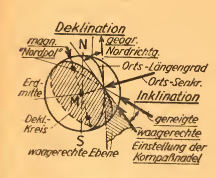


Abb. 67 Magnetische Deklination und Inklination

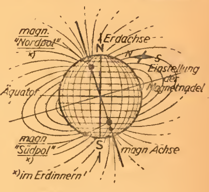


Abb. 68 Erdmagnetisches Feld mit Inklinationslinien

etwa 67°. Abb. 67 erläutert die Deklination und Inklination, Abb. 68 gibt eine Darstellung von den auf und außerhalb der Erde bestehenden magnetischen Richtkräften. Die gekrümmten Linien geben die Richtung dieser Kräfte selbst und die damit übereinstimmende Stellung der Magnetnadel an und heißen deshalb magnetische Erdkraftlinien; der von ihnen erfüllte Raum heißt das erdmagnetische Feld.

Der gegen mechanische und magnetische Beanspruchungen besonders widerstandsfähig gebaute Schiffskompaß hat an Stelle der Magnetnadel eine Anzahl kräftiger, paralleler Magnetstäbe, mit denen die zum Kompaß gehörige Windrose vereinigt ist. Eine „Kardanische Aufhängung" nach Abb. 69 macht ihn in Verbindung mit einer ihn schwimmend tragenden Dämpfungsflüssigkeit gegen die Schiffsbewegungen unempfindlich. Da der Schiffskörper mit seinen Eisenmassen die Kompaßstellung stört, wird die Abweichung vom richtigen

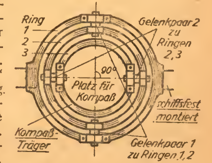


Abb. 69 Kardanische Aufhängung

Wert (Deviation) durch Anbringung geeigneter Ausgleichsmassen oder Dauermagnete ausgeglichen. Der Magnetkompaß erhielt in dem Kreiselkompaß einen sehr hochwertigen Mitbewerber, der ihn auf Schiffen und Flugzeugen zunehmend verdrängt. Es handelt sich bei diesem nicht mehr um magnetische Richtwirkung, sondern Ausrichtung durch in schnellste Umdrehung versetzte Massen. Besonderen Wert für die Ortung im Gelände hat der mit Visiereinrichtung und Leuchtmarken ausgerüstete Marschkompaß.

Weitere Eigenschaften der Magnete

Ein Nordpol hält den Südpol eines andern Magneten fest, dessen Nordpol aber stößt er ab. Ungleichnamige Pole ziehen sich an, dagegen stoßen sich gleichnamige Pole ab. Die Erde ist also ein zwar schwacher, aber sehr weit wirkender Dauermagnet. Da der Nordpol einer Magnetnadel nach dem magnetischen „Nord"-Pol weist, ist dieser in Wahrheit ein Südpol im Sinne der getroffenen Festlegungen und sinngemäß der magnetische „Süd"-Pol in Wahrheit ein Nordpol.

Der Nordpol eines Magneten ruft in einem genäherten Eisenstück einen Südpol hervor und umgekehrt, wie Abb. 70 zeigt. Diese Erscheinung heißt magnetische Induktion oder magnetische Influenz und macht das beeinflußte Eisenstück für die Dauer der Induktion selber zum Magneten. Das beweist das Festhalten eines kleinen Probeeisens E. Induzierte Magnetpole haben immer zu den erregenden Polen entgegengesetzte Polarität. Wie Abb. 71 weiter zeigt, wird die von einem Magneten auf ein Eisen-

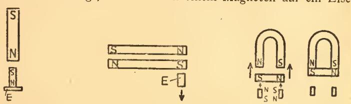


Abb. 70 Magnetische Induktion oder Influenz

Abb. 71 Schwächung der Induktion zweier Magnete in Gegenpollage

Abb. 72 Hufeisenmagnete mit nicht angezogenem und angezogenem Anker

stück E ausgeübte Induktion durch Annäherung eines anderen Magneten mit entgegengesetzter Pollage geschwächt, und das vom 1. angezogene Eisen E kann wieder abfallen. Zwei mit ungleichnamigen Polen aufeinander gelegte gleichstarke Magnete haben keine magnetische Wirkung nach außen, sie halten sich nach innen magnetisch fest.

Die von einem Hufeisenmagneten gemäß Abb. 72 in seinen Ankereisen induzierten Pole wirken nur so lange nach außen, als der Anker noch nicht ganz angezogen ist. Bei völligem Anliegen schließt der Anker den magnetischen Kreis des Magneten kurz. Der angezogene Anker verhindert

ein weiteres Induzieren nach außen. Wird der Anker durch eine Anzahl kleiner Eisenteilchen ersetzt, so reihen sich diese in einheitlicher Ordnung mit ungleichnamigen Polen aneinander und bilden zwischen den Magnetpolen eine geschlossene Kette (Abb. 73).

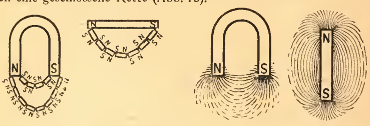


Abb. 73 Magnet mit zwischen den Polen hängender Eisenkette

Abb. 74 In Eisenfeilspäne oder Eisenpulver getauchte Magnete

Taucht man einen Magneten in Eisenfeilspäne oder Eisenpulver, so erhält man viele derartige, räumlich nebeneinander zwischen den Magnetpolen verlaufende Ketten aus Teilchenmagneten nach Abb. 74. Deckt man über die Pole eines Magneten eine Glasscheibe und schüttet unter leichtem Klopfen der Scheibe Eisenpulver darauf, so erkennt man genau, wie die kleinen Teilchen als induzierte Magnete sich der Richtkraft des Magneten örtlich anpassen und zusammenhängende Linien, die *magnetischen Kraftlinien*, bilden (vgl. auch Abb. 68). Es entsteht das *Kraftlinienfeld* des betrachteten Magneten (Abb. 75).

Die Anzugskraft eines Magneten nimmt mit Annäherung an seine Pole zu und ist an den Polen am größten. Die sinnfällig übereinstimmende Zusammendrängung der Kraftlinien nach den Polen ermöglicht den Vergleich zwischen der *Kraftliniendichte*, d. h. der auf 1 cm² entfallenden Anzahl, und der örtlich ausgeübten Magnetkraft auf einen dorthin gebrachten Vergleichspol. Die Kraftliniendichte kennzeichnet damit eine zugehörige örtliche magnetische Feldstärke, wobei unter *magnetischem Feld* der von allen Feldlinien des Magneten durchsetzte Raum verstanden wird. Die Feldlinien eines Magneten werden in ihrer Gesamtheit auch als *magnetischer Fluß* bezeichnet.

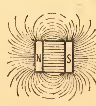


Abb. 75 Kraftlinienfeld eines Magneten

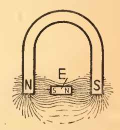


Abb. 76 Feldlinienzusammendrängung in einem Eisenstück

Ein zwischen die Pole eines Magneten gebrachtes Eisenteilchen E bewirkt nach Abb. 76 vermöge seiner sehr viel besseren magnetischen Leit-

fähigkeit das Zusammendrängen der zuvor in Luft allein dünner verteilten Feldlinien innerhalb des Eisens. Die Kraftliniendichte oder Induktion ist daher im Eisen sovielmal größer als in Luft, sovielmal die magnetischen Leitfähigkeiten des Eisens größer sind als die der Luft. Wir erkennen also, daß die früher betrachtete Erregung von neuen Magnetpolen in angezogenen Eisenteilen, die magnetische Induktion oder Influenz, auf der örtlichen Vergrößerung der Kraftliniendichte durch das an Stelle der Luft getretene induzierte Eisen beruht. Zur einheitlichen Festlegung des Kraftlinienverlaufs wurde als die Richtung eines magnetischen Flusses der Weg vom Nordpol des Magneten über die äußere Umgebung (Luft usw.) zum Südpol zurück bestimmt.

Das Kraftlinienfeld zwischen den gleichnamigen Polen zweier Magnete deutet Abb. 77 an. Kraftlinien gleichnamiger Pole widerstreben sich räumlich. Zwangsweises Festhalten ihrer Magnete ändert nichts daran; sie bleiben dennoch für sich, vereinigen sich also unter keinen Umständen. Sie üben dabei gegenseitig einen der Größe ihrer Zusammendrängung, d. h. ihrer Kraftliniendichte entsprechenden abstoßenden Druck auf den Pol des Gegenpartners aus.



Abb. 77 Kraftlinienfeld zwischen zwei gleichnamigen Magnetpolen

Abschließend sei bemerkt, daß die Kraftlinien nur ein Hilfsmittel zur Darstellung magnetischer Zustände und Wirkungen sind, ebenso wie dies vom Magnetfluß gilt, der niemals „fließt", sondern nur die Ausbreitung des magnetischen Zwangszustandes um einen Magneten herum kennzeichnet und zur Erleichterung der Vorstellung dient.

Strom, Spannung, Widerstand

Anwendungen der Elektrizität sind uns aus dem täglichen Leben bekannt und vertraut. Jeder kennt Glühlampen, die elektrischen Haushaltgeräte, die Klingeln, Fernsprecher und auch wohl elektrische Maschinen. In all diesen Geräten fließt ein elektrischer Strom, der über Leitungen, Schalter, Sicherungen u. a. m. von einer Batterie oder einem Kraftwerk herkommt. Der elektrische Strom kann nur fließen, wenn eine leitende Verbindung zwischen dem Stromerzeuger (Element, Akkumulator, Dynamomaschine) und dem Verbrauchsgerät (Glühlampen, Motoren, Heiz- und Kochgeräte usf.) besteht. Man spricht dann von einem Stromkreis, der also aus drei Teilen besteht, dem Stromerzeuger, der Leitung und dem Stromverbraucher. Damit nun die Verbindung zwischen Erzeuger und Verbraucher nach Belieben hergestellt oder unterbrochen werden kann, sind sogenannte Schalter in den Stromkreis eingebaut. Würde man

Erzeuger und Verbraucher nur durch eine Leitung miteinander verbinden, so könnte der Strom nicht fließen, denn er muß nicht nur zum Verbraucher hin, sondern von diesem auch wieder zurück zum Erzeuger fließen. Es sind also zwei Leitungen erforderlich, von denen die eine als Hinleitung, die andere als Rückleitung bezeichnet wird, wobei letztere auch durch die Erde oder durch Metallmassen (Schiffskörper, Kraftwagenchassis) ersetzt werden kann. Es findet also immer ein Kreislauf statt. Der Strom fließt z. B. von der Dynamomaschine über einen geschlossenen Schalter zu einer Lampe, in der Lampe durch einen dünnen Metalldraht, der dabei glühend wird, dann über die zweite Leitung zurück zur Dynamomaschine und zur Vollendung seines Kreislaufes auch durch die Dynamomaschine hindurch.

Am einfachsten denkt man sich die im Kreise strömende „Elektrizität" als aus sehr kleinen Elektrizitätsteilchen, sogenannten Elektronen, bestehend. Da diese Teilchen bedeutend kleiner sind als die kleinsten nicht mehr teilbaren Metallteilchen der Leitungen und elektrischen Apparate, nehmen wir an, daß die Elektronen sich zwischen den kleinsten Metallteilchen, den sogenannten Atomen noch bequem hindurchbewegen können. Nun haben aber nicht alle Stoffe die Fähigkeit, die Elektronen leicht hindurchzulassen, mit anderen Worten, den elektrischen Strom gut zu leiten. Man spricht deshalb von Leitern und Nichtleitern. Zu den Leitern, das sind solche Stoffe, die den Elektronen einen bequemen Durchgang gestatten, gehören insbesondere alle Metalle und die Kohle, sowie die Säuren, Basen und Salzlösungen, wobei letztere beim Stromdurchgang eine chemische Veränderung erfahren. Aus der großen Zahl der Nichtleiter (auch Isolierstoffe genannt) seien hier nur Gummi, Porzellan, Papier und Kunstharz herausgegriffen. Daß ein elektrischer Strom fließt, daß also, mit anderen Worten, Elektronen z. B. in einem Metalldraht in Bewegung sind, können wir mit keinem unserer Sinne unmittelbar wahrnehmen, wir schließen es nur aus den Veränderungen, die im Leiter oder dessen Umgebung durch Erzeugung von Licht und Wärme, durch magnetische Wirkungen oder durch chemische Zersetzung von Flüssigkeiten hervorgerufen werden.

Wie kommt nun eine Bewegung der Elektronen, also ein Fließen des elektrischen Stromes zustande?

Durch die chemischen Vorgänge in einem Element oder durch die Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld entsteht an den Anschlußklemmen (Polen) ein Elektronenmangel bzw. ein Elektronenüberschuß. Das Bestreben, dazwischen einen Ausgleich herbeizuführen, führt dann zu einer Bewegung der Elektronen über den angeschlossenen Stromkreis. Je größer nun der Elektronenüberschuß an der einen Klemme (—-Pol) und je größer der Elektronenmangel an der anderen Klemme (+-Pol) ist, um so größer ist der Druck, mit welchem die Bewegung der Elektronen vor sich geht. Diesen Druck bezeichnet man mit Spannung. Spannung ist also der Druck, der die Elektronen durch den Leiter treibt.

Wir haben schon erwähnt, daß wir die Wirkungen des elektrischen Stromes durch die Erzeugung von Wärme und Licht, von magnetischen Vorgängen und chemischen Zersetzungen feststellen können. Jede dieser Erscheinungen kann sich nun verschieden stark auswirken. So kann z. B. ein Draht durch den elektrischen Strom mehr oder weniger stark zum Glühen gebracht werden. Wir schließen daraus, daß der Strom verschieden groß sein kann. Ein Strom ist um so größer, je mehr Elektronen an irgendeiner Stelle des Leiters in der Zeiteinheit, einer Sekunde, vorbeifließen. Die in der Zeiteinheit durch einen bestimmten Leiterquerschnitt hindurchfließende Elektrizitätsmenge (Elektronenzahl) nennt man Stromstärke.

Eine anschauliche Vorstellung von Spannung und Stromstärke vermittelt auch ein Vergleich mit einer Wasserleitung. Soll nach Abb. 78 durch das Rohr *R* ein Wasserstrom fließen, so muß der Behälter *A* höher liegen als der Behälter *B*. Je größer der Höhenunterschied zwischen den beiden Behältern ist, um so größer ist auch der Druck, der das Wasser treibt. Diesem Druck entspricht die elektrische Spannung. Gemessen wird die Spannung in Volt (V), benannt nach dem italienischen Forscher Volta. Die Wassermenge, die sekundlich dauernd durch das Rohr fließt, ist mit der Stromstärke zu vergleichen. So wie eine bestimmte Wassermenge, also eine bestimmte Anzahl Liter in jeder Sekunde durch das Rohr fließt, wenn ein Druck vorhanden ist, so fließt auch eine bestimmte Stromstärke durch eine elektrische Leitung, wenn eine Spannung vorhanden ist. Die Einheit der Stromstärke ist das Ampere (A), benannt nach dem französischen Physiker Ampère. Wenn Wasser durch eine Leitung fließt, so wird die Strömung durch die Rohrwandungen abgebremst; die Leitungen setzen dem Strom einen Widerstand entgegen. Befinden sich Schmutz, Schlamm o. ä. in der Leitung, so kann der Widerstand so groß sein, daß nur noch ein schwacher Strom durch die Leitung fließt oder, wenn die Leitung vollkommen verstopft ist, der Strom ganz aufhört. In ähnlicher Weise stellt sich auch beim Durchfließen des elektrischen Stromes durch einen Leiter ein Widerstand dem Stromfluß entgegen. Der Widerstand, der beim Durchfließen des elektrischen Stromes in einem Leiter entsteht, wird in Ohm (Ω) gemessen (Ohm war ein deutscher Forscher). In einem elektrischen Stromkreis sind also drei Begriffe wichtig: die Spannung, der Widerstand und die Stromstärke. Diese Größen sind nun nicht voneinander unabhängig, ihr Zusammenhang soll im folgenden geklärt werden.

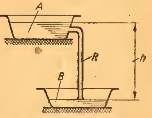


Abb. 78 Veranschaulichung des Ohmschen Gesetzes

Bilden wir aus einer Stromquelle und einem Widerstand, z. B. einer Glühlampe, einen elektrischen Stromkreis, dann fließt ein Strom; dieser möge so groß sein, daß die Lampe hell aufleuchtet. Schalten wir dagegen

an dieselbe Stromquelle zwei Glühlampen, wie Abb. 79 zeigt, so werden die beiden Lampen wesentlich schwächer leuchten, woraus man schließen kann, daß die Stromstärke im zweiten Fall wesentlich geringer geworden ist. Je größer also der Widerstand in einem Stromkreis ist, um so kleiner wird die Stromstärke. Erhöhen wir nun die Spannung, d. h. benutzen wir z. B. statt eines Elements deren zwei, die nach Abb. 80 geschaltet sind, so glühen unsere beiden Lampen wieder so hell wie beim ersten Versuch. Die Stromstärke muß also wieder gestiegen sein. Wir folgern daraus: Je größer die Spannung in einem Stromkreis ist, um so größer wird die Stromstärke. Die Abhängigkeit der Stromstärke von Spannung und Widerstand kommt im Ohmschen Gesetz durch die Gleichung

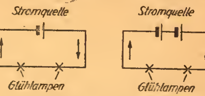


Abb. 79 Stromkreis mit zwei Glühlampen und einem Element

Abb. 80 Stromkreis mit zwei Glühlampen und zwei Elementen

$$\text{Stromstärke} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Widerstand}}$$

zum Ausdruck. Bezeichnet man die Stromstärke mit I, die Spannung mit U und den Widerstand mit R, so ist:

$$\boxed{I = \frac{U}{R}}$$

Das Ohmsche Gesetz ist das grundlegende Gesetz der Elektrotechnik. Durch Messen von Spannung und Stromstärke können so Widerstände von Drähten, Glühlampen und sonstigem elektrischem Gerät berechnet werden. Sind die Widerstände bekannt, so kann die Stromstärke berechnet werden, die beim Anlegen einer bestimmten Spannung entsteht.

97. Beispiel: Welche Stromstärke entsteht, wenn an eine Glühlampe von 500 Ω Widerstand eine Spannung von 220 V gelegt wird?

Lösung: $I = \frac{U}{R} = \frac{220}{500} = 0{,}44\ \text{A}$

Die Stromstärke beträgt 0,44 A.

Die Wärmewirkung des elektrischen Stroms

Elektrische Geräte verwandeln häufig elektrische Energie in Wärme. Eine elektrische Glühlampe z. B. strahlt recht erhebliche Wärmemengen ab. Von der aufgewendeten elektrischen Energie setzt sich der weitaus größte Teil in Wärme um. Die Glühlampe wird daher für elektrische Schwitz-

bäder als Wärmequelle benutzt. Je nach der verlangten Temperatur werden in einem engen Sitzkasten, der nur den Kopf frei läßt und nach oben durch eine Halsbinde abgeschlossen ist, eine größere Anzahl Glühlampen eingeschaltet. Die Wärme staut sich im Innern des Kastens und steigt in kurzer Zeit auf die gewünschte Temperatur.

Die sekundlich entwickelte Wärme steigt mit dem aufgenommenen elektrischen Strom. Je stärker bei unveränderter Spannung der Strom ausfällt, desto mehr Wärme entsteht also. Wie stark der Strom wird, bestimmt der gewählte Widerstand des Stromkreises.

Wie kommt es nun, daß der gleiche Strom, der z. B. eine Lampe und die dazugehörigen Verbindungsleitungen durchfließt, nur die Lampe erwärmt, nicht aber die Zuleitungen? Vergleicht man den äußerst dünnen Glühdraht einer Lampe mit den viel stärkeren Anschlußleitungen, so erkennt man ,daß der Strom große Mühe hat, sich durch den dünnen Draht der Glühlampe hindurchzuzwängen; er findet einen großen Widerstand. Bei der Überwindung dieses Widerstandes setzt sich der größte Teil der elektrischen Energie in Wärme um. Damit jedoch in den Leitungen möglichst wenig Wärme entsteht, erhalten sie einen hinreichend großen Querschnitt und damit geringen Widerstand. Wir teilen deshalb den in einem Stromkreise bestehenden Gesamtwiderstand so auf, daß in den Heizkörper möglichst der ganze Widerstand des Stromkreises und auf die Zuleitungen möglichst wenig Widerstand entfällt. Wenn wir den Zuleitungswiderstand als vernachlässigbar klein behandeln, so können wir die Größe eines Heizwiderstandes bei vorgeschriebener Spannung und festliegendem Strom aus diesen Werten nach dem Ohmschen Gesetz errechnen.

Heizwiderstände sind Drähte aus Manganin, Nickelin, Konstantan usw., die auf einen isolierenden, feuerfesten Widerstandsträger gewickelt und in den Wärmeerzeuger eingebaut werden. Muß der Widerstand große Wärmemengen abgeben, so geben wir ihm eine große Oberfläche, d. h. großen Querschnitt und große Länge; haben wir es nur mit geringen Wärmemengen zu tun, so genügt eine kleine Abstrahlungsoberfläche, d. h. ein dünner, entsprechend kürzerer Draht für den gleichen Widerstandswert. Würden wir auf die Abstrahlungsoberfläche keine Rücksicht nehmen, so würde sich bei ungenügender Größe die Wärme im Draht stauen und ihn schnell auf Schmelztemperatur bringen, der Draht würde also abschmelzen.

Zusammenfassend. stellen wir fest, daß bei vorgeschriebener Anschlußspannung die elektrisch erzeugte Wärme von dem Widerstand des Heizgerätes, von dem aufgenommenen Strom und selbstverständlich von der Einschaltzeit bestimmt ist. Wir wollen uns nun eine Anzahl elektrischer Wärme-



Abb. 81 Tauchsieder

geräte ansehen. Wenn wir z. B. den in Abb. 81 dargestellten Tauchsieder für 600 Watt (W) benutzen, um ein Glas Wasser zum Sieden zu bringen, so wird die hierzu erforderliche Wärmemenge schätzungsweise in $1\frac{1}{2}$ Minuten erzeugt. Für eine gewöhnliche Teekanne von 4 Gläsern Inhalt werden wir die 4fache Wärmemenge benötigen. Nehmen wir dazu den gleichen Tauchsieder, so werden wir ihn viermal so lange, also etwa 6 Minuten, eingeschaltet lassen müssen.

Wollen wir das Kochen der gleichen Wassermenge in der halben Zeit, d. h. in 3 Minuten, erreichen, so müssen wir in jeder Sekunde die doppelte Wärmemenge heranführen. Wir können dazu noch einen zweiten Tauchsieder von gleicher Größe in die Teekanne einführen. Genau die gleiche Wirkung könnten wir aber auch mit einem einzigen Tauchsieder von doppelter Größe erreichen. Man sagt dann von diesem, er habe eine Leistung von (2mal 600 W gleich) 1200 W, wofür wir auch 1,2 Kilowatt (kW) schreiben dürfen (1 Kilowatt entspricht 1000 Watt).

Wenn wir einen elektrischen Heizofen, der die Leistung 1 kW aufnimmt, 1 Stunde lang benutzen, so verbrauchen wir dazu die elektrische Arbeit von 1 kW mal 1 Stunde oder 1 Kilowattstunde (kWh). Wir können dann auch angeben, wieviel die mit dem Heizofen in einer Stunde erzeugte Wärme kostet, da das Elektrizitätswerk die verbrauchte Energie nach kWh berechnet.

In Abb. 82 sehen wir eine Kochplatte, in Abb. 83 die aus einer solchen ausgebaute Heizspirale mit den Anschlußdrähten. Die Heizspirale besteht aus zwei Einzelwiderständen, deren Anfang und Enden sichtbar sind.



Abb. 82 Kochplatte



Abb. 83 Heizspirale einer Kochplatte



Abb. 84 Kochtopf für elektrische Platte

Ein Stufenschalter gestattet, entweder nur einen oder beide Heizwiderstände einzuschalten. Steht der Schaltergriff auf Null, so ist die Kochplatte ausgeschaltet.

Den zu einer elektrischen Kochplatte gehörigen Kochtopf[1] zeigt Abb. 84. Wir erkennen daran den hier besonders stark ausgebildeten Gefäßboden. Dieser wird gleich der Kochplatte völlig eben ausgeführt, so daß beide Teile fest und gleichmäßig aufeinander gestellt werden können. Das ist für einen guten Wärmeübergang von der Platte zum Koch-

[1] Vielfach sind auch für gelegentliche Benutzung einzelne Kochtöpfe mit fest eingebautem Heizwiderstand im Gebrauch.



Abb. 85 Elektrischer Kochherd

topf erforderlich. Derartige Kochplatten baut man mit zugehörigen Schaltern zu einem in Abb. 85 dargestellten Kochherd zusammen, der meist noch mit einer Back- und Bratröhre ausgerüstet ist. In vielen großen Wirtschaftsbetrieben, vor allem an Bord von Schiffen, wird heute elektrisch gekocht

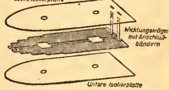


Abb. 86 Inneres eines elektrischen Bügeleisens

und gebacken. Außer der Sauberkeit infolge des Fortfalls der sonst nötigen Kohlenzufuhr und Aschenabfuhr kennzeichnet solche Betriebe die außerordentliche Anpassungsfähigkeit an den augenblicklichen Bedarf.

Aus der großen Zahl weiterer Anwendungsmöglichkeiten elektrisch erzeugter Wärme können hier nur wenige Beispiele genannt und z. T. durch beigefügte Abbildungen veranschaulicht werden.

Als heute unentbehrliches Hausgerät ist das elektrische Bügeleisen zu erwähnen; Abb. 86 läßt einen Blick in das Innere des Geräts tun. Wir erkennen seine der Kochplatte ähnliche Bauart. An Stelle der Widerstandsspirale tritt hier ein mit Widerstandsdraht umwickelter Wicklungsträger von ebener Fläche, der, zwischen zwei Isolierplatten gestützt, unmittelbar auf der Sohlplatte des Bügeleisens ruht. Er wird gegen diese mit fest verschraubten Gewichtsplatten gedrückt. Abb. 87 zeigt das Röntgenbild eines Heizkissens. Man ersieht daraus die gleichmäßige Verteilung des Heizwider-

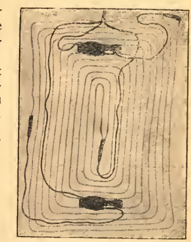


Abb. 87 Röntgenbild eines Heizkissens

standes, der darin durch dünne Linien erkennbar wird. Es sind wieder zwei Widerstände benutzt, die getrennt oder gleichzeitig mit Strom beschickt werden können. Die darin erscheinenden dunklen Teile sind Temperaturregler. Diese schalten das Heizkissen bei zu hoher Temperatur ab und umgekehrt nach einer gewissen Abkühlung wieder ein. Es tritt so eine annähernd gleichmäßige Heizung ein.

In der Landwirtschaft werden elektrische Futterdämpfer viel gebraucht. Das für eine größere Futtermenge zu benutzende Kochgefäß nimmt eine entsprechend größere elektrische Arbeit auf als die früher betrachteten Kochgeräte.

Es sei nicht vergessen, an die vielen in der Industrie benutzten Trockenschränke zu denken, in denen feuchtigkeitsempfindliche Gegenstände vor der weiteren Verarbeitung getrocknet werden.

In der Schweißtechnik werden Bleche oder andere Metallteile unter Einsatz starker elektrischer Ströme miteinander verbunden. Die Schweißmaschinen besitzen kräftige Stäbe oder Rollen als Stromzuführungen, die als Elektroden bezeichnet werden (Abb. 88). Die zu verbindenden Teile werden nun zwischen den Elektroden zusammengepreßt, so daß der Strom an der gewählten Schweißstelle den vorhandenen Übergangswiderstand durchlaufen muß. Die Widerstandsstellen werden dabei rotglühend und lassen sich durch Druck vereinigen. Diese Schweißung ist als „elektrische Widerstandsschweißung“ bekannt.

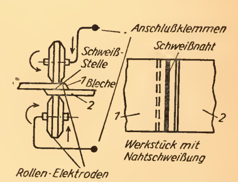


Abb. 88 Elektrische Widerstandsschweißung mit Stab- (Punktschweißung) und mit Rollen-Elektroden (Nahtschweißung)

Allgemein bekannt ist das häufige Aufblitzen eines elektrischen Lichtbogens, wie er bei der danach genannten elektrischen Lichtbogenschweißung entsteht. Hierbei benutzt man stabförmige Abschmelzelektroden, die man an den einen Pol einer starken Stromquelle legt (Abb. 89). Der andere

Pol der gleichen Stromquelle wird an das Werkstück gelegt. Bei Berührung des Werkstückes mit der Abschmelzelektrode und leichtem Anheben derselben entsteht ein kräftiger elektrischer Lichtbogen, in dem die Stabelektrode schmilzt und auf die zugleich rotglühend gewordene Gegenstelle des Werkstücks nach und nach heruntertropft. Der passend gewählte Werkstoff der Abschmelzelektrode geht bei der Erkaltung eine feste Verbindung mit dem Werkstück ein.

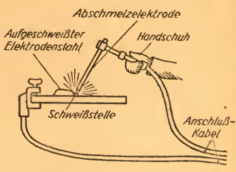


Abb. 89 Elektrische Lichtbogenschweißung

In den bekannten Elektrostahlöfen (Abb. 90) wird flüssiger Stahl durch zwei oder drei senkrechte Elektroden im Lichtbogen auf besonders hohe Temperatur weiter erhitzt. Die noch vorhandenen schädlichen Beimengungen des Stahls verbrennen, während die entstehende Schlacke sich als Schutzschicht gegen Lufteinflüsse auf der Oberfläche des flüssigen Stahls absetzt. Der so verfeinerte Stahl ist von ausgezeichneter Güte und vergußfertig zur Weiterverarbeitung.

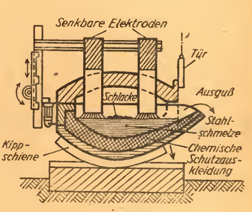


Abb. 90 Elektrostahlofen

In den bis jetzt betrachteten Maschinen und Geräten wurde die zugeführte elektrische Energie in Nutzwärme umgesetzt. Diese entstand entweder in einem stromdurchflossenen Widerstand oder an einem zwischen Elektroden übergehenden Lichtbogen. Für den elektrischen Strom ist aber die gesamte Strombahn ein Widerstand, also nicht nur der zur nutzbaren Wärmeerzeugung in die Geräte eingebaute Widerstand. Die Leitungen dürfen sich aber nicht erwärmen. Wir müssen sie vor zu großer Erwärmung durch zu starke Ströme schützen. Dazu sind die Sicherungen eingebaut. Eine Ausführungsform davon zeigt Abb. 91. In einer Porzellanpatrone befindet sich ein dünner Silberdraht, der so bemessen ist, daß er bei normalem Betrieb die vorgesehene Belastung, z. B. 6 A, 2 Stunden lang aushält. Schalten

wir noch mehr Verbraucher an den so gesicherten Stromkreis, so steigt der Strom über 6 A, z. B. auf 7 oder 8 A. Nun schmilzt nach kurzer Zeit der Sicherungsdraht durch, weil er durch den stärkeren Strom schneller erwärmt wird. Dabei wird die ganze Anlage stromlos, und die Leitungen sind vor zu starker Erwärmung geschützt. Würden wir statt der 6-A- eine 10-A-Sicherung in unsere nur für 6 A bemessene Anlage einsetzen, so könnte die starke Sicherung den bei 7 *A* schon unzulässig hohen Strom nicht abschalten. Die meist unter Putz oder in Rohren verlegten Leitungen würden, ohne daß wir es rechtzeitig merken, sich im Laufe der Zeit unzulässig hoch erhitzen und gar einen Brand verursachen. Die Sicherungen werden für den jeweils höchstzulässigen Stromwert der Zuleitungen gewählt. Man stellt sie dazu in genormten und untereinander unverwechselbaren Stufen her; eine stärker gewählte Sicherung kann also gar nicht eingesetzt werden.

Ein besonders gefährliches Unterfangen ist es, durchgegangene Sicherungen verbotswidrig flicken zu wollen; denn ein dazu benutzter Draht hat nicht die richtige Wärmeempfindlichkeit. Die geflickte Sicherung würde uns daher das gleiche Schicksal bereiten wie eine zu große Sicherung. Möge Abb. 92 als eine eindringliche Mahnung dienen und vor Begehung eines solchen scharf zu verurteilenden Mißgriffes bewahren!

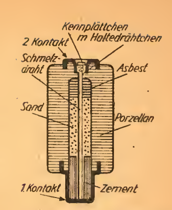


Abb. 91 Sicherung im Schnitt



Abb. 92 Unfallverhütungsbild

Die chemischen Wirkungen des elektrischen Stroms

Die Lenkstangen der Fahrräder bleiben auch trotz Fahrten bei starkem Regen jahrelang unverändert blank. Erst im Verlaufe weiterer Jahre bilden sich an der Oberfläche Risse und platzen kleine Stücke der blanken Metallschicht ab; alsdann entstehen auch an diesen Stellen Rostflecke. Es ist allgemein bekannt, daß die stählerne Lenkstange gegen das Rosten durch eine dünne Metallhaut aus Nickel oder Chrom geschützt wird. Wie kommt ein solcher Metallüberzug zustande?

In Abb. 93 ist ein mit einer Badflüssigkeit (Elektrolyt) gefülltes Gefäß dargestellt, seine Ränder tragen zwei starke Stäbe (Elektroden), die mit

den Polen einer elektrischen Sammlerbatterie[1] verbunden werden. An der positiven Elektrode (Anode) hängt z. B. für Vernicklungszwecke eine Nickelplatte, dagegen an der negativen Elektrode (Kathode), durch einen Draht mit dieser leitend verbunden, die zur Vernicklung bestimmte stählerne Lenkstange. Als Badflüssigkeit dient eine Nickelsalzlösung, z. B. aus schwefelsaurem Nickel, das durch chemische Einwirkung von Schwefelsäure auf Nickel entsteht.

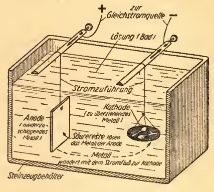


Abb. 93 Vorrichtung zum Galvanisieren

Schickt man durch eine solche Vernicklungszelle den Strom der Sammlerbatterie, so wird die Flüssigkeit durch den Strom elektrochemisch zersetzt, während sich gleichzeitig auf der Lenkstange eine feine Nickelhaut absetzt. Hat diese nach einer angemessenen Zeit die gewünschte Stärke angenommen, so schaltet man den Strom ab; die vernickelte Lenkstange wird darauf sauber abgespült, getrocknet und geputzt. Die Vernicklung ist fertig.

In ähnlicher Weise werden auch eine Reihe anderer Metallüberzüge hergestellt, die man als Vergoldung, Versilberung usw. bezeichnet. Der Art des gewünschten Metallüberzuges entsprechend hängt man z. B. bei Verchromung als Anode anstatt des Nickelbleches eine Chromelektrode auf und wählt als Badflüssigkeit eine Chromsalzlösung. Das in der Metallplattierung zusammengefaßte Gewerbe liefert noch u. a. in der Technik weit verbreitete Überzüge aus Zink, Blei und Cadmium. Das Grundlegende all dieser Fälle läßt sich wie folgt darstellen:

Der elektrische Strom trennt das in der Flüssigkeit (dem Elektrolyten) befindliche Metallsalz chemisch in das Metall und einen chemisch wirksamen Restbestandteil (Säurerest); dabei wandern in der Flüssigkeit alle Metallteilchen an die Kathode zu dem dort aufgehängten Werkstück, wo sie sich in feinster Verteilung als Metallüberzug ablagern. Die freiwerdenden Säurereste wandern entgegengesetzt, also zur Anode. Dort holen sie sich von der eingehängten Metallplatte Ersatz für die ihnen zuvor durch den Strom entrissenen Metallteilchen. Die Metallplatte wird daher in entsprechendem Maße chemisch angegriffen, d. h. aufgefressen, wie an der Kathode auf dem Werkstück aus der Badflüssigkeit Metall abgeschieden wird.

Ein verwandtes technisches Gebiet, die Galvanoplastik, stellt für Druckereizwecke auf elektrochemischem Wege die sogenannten Klischees[2]

[1] Auch Akkumulatorenbatterie genannt.
[2] Zu Deutsch: Druckstock.

von Bildern her. Das zu druckende Bild wird zunächst auf photochemischem Wege auf eine Platte geätzt; falls diese elektrisch nichtleitend ist, z. B. eine Steinplatte, wird sie durch Bestreichen mit einer feinen Graphitschicht leitend gemacht und wirkt dann an der Bildoberfläche wie eine Metallelektrode. Die so vorbereitete Platte wird nun in der zuvor für die Lenkstange beschriebenen Weise verkupfert und hierzu als Kathode in die Kupfersalzlösung eingehängt. Entsprechend den Erhabenheiten und eingeätzten Vertiefungen der Platte bildet sich in der für das Drucken nötigen spiegelbildlichen Form das verlangte Gegenbild. Die zunächst noch mechanisch wenig widerstandsfähige Kupferhülle wird vorsichtig von der Platte abgenommen und mit einer kräftigen Bleischicht zu dem als Druckstock verwendbaren Klischee hintergossen.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen fassen wir kurz zusammen: Metallsalzlösungen (Elektrolyte) werden beim Durchgang des elektrischen Stromes chemisch verändert. An der Kathode scheidet sich das in der Salzlösung enthaltene Metall in chemisch freiem Zustande ab. An der Anode sammeln sich die Reste der bei der Zersetzung (Elektrolyse) ihres Metalls beraubten Salzmoleküle als chemisch wirksame Säurereste und holen sich von einer dort aufgehängten artgleichen Metallplatte Ersatz, indem sie die Metallplatte nach und nach auflösen. (Zu den Elektrolyten zählt man auch andere Flüssigkeiten, wie Lösungen von Säuren und Laugen, die ebenfalls durch den Strom chemisch zersetzt werden.)

Schließt man die Stromzuleitungen umgekehrt an, so ändert sich die Stromrichtung, und Anode und Kathode werden vertauscht. Damit tauschen auch die entstehenden Zersetzungsprodukte ihre Plätze. Eine schon während einiger Zeit erreichte Vernickelung würde daher nach Umschaltung des Stromes durch Wiederauflösung des ausgeschiedenen Metalls zerstört. Wir erkennen, daß der richtige Anschluß der Pole bei der Elektrolyse eine entscheidende Rolle spielt. Ein Strom, der dauernd seine Richtung wechselt, wie er in der Technik als „Wechselstrom" aus Wechselstrom- oder Drehstromnetzen[1] entnommen werden kann, ist also für elektrochemische Verfahren unbrauchbar; es kann hier nur Gleichstrom benutzt werden, der immer in der gleichen, ihm durch die Pol-Auswahl gegebenen Richtung durch den angeschlossenen Verbraucher fließt. Als Gleichstromquellen dienen außer den schon erwähnten Sammlerbatterien meist besondere Gleichstrommaschinen. An dieser Stelle sei erwähnt, daß man in der Technik zur Unterscheidung der Pole einer Gleichstromquelle elektrochemisch empfindliches „Polreagenzpapier" benutzt. Wenn wir einen mehrere Zentimeter langen, mit Wasser angefeuchteten Streifen dieses besonders getränkten Papiers mit den auseinandergehaltenen Polen einer Gleichstromquelle berühren, so wird die Tränkung des Papiers durch einen

[1] Unter Drehstrom versteht man ein System von 3 in bestimmter Weise zusammengeschalteten Wechselströmen, zu deren Fortleitung man 3 oder auch 4 Leitungen braucht. Zwischen je zweien dieser Leitungen kann man Wechselstrom aus dem Netz entnehmen.

schwachen, darüber fließenden Strom chemisch zersetzt. Dabei bildet sich am Minuspol ein kräftig roter Niederschlag, während die mit dem Pluspol berührte Stelle keine Änderung der Farbe zeigt.

Wie nun der elektrische Strom chemische Veränderungen hervorruft, so kommt auch z. B. in den bekannten Taschenlampenbatterien umgekehrt durch chemische Zersetzung elektrischer Strom zustande. In ähnlicher Weise liefern auch die bekannten Sammler (Akkus) infolge chemischer Umsetzungen Elektrizität. Wir wollen zunächst die bei dem Taschenlampenelement maßgebenden Zusammenhänge an Hand des Beispiels der Abb. 96[1] erörtern.

Wenn man ein Gefäß mit verdünnter Schwefelsäure füllt und in dieselbe zwei Zinkbleche eintaucht, so beobachtet man ein Aufschäumen an den Blechen infolge Gasblasenbildung; es läßt sich aber keine Spannung zwischen beiden Zinkblechen messen. Nimmt man jedoch nur eine Zinkplatte und dazu eine solche aus anderem Metall, z. B. aus Kupfer oder (Abb. 96) auch einen Kohlestab, so kann man dieser Anordnung einen elektrischen Strom entnehmen. Die Größe der dabei auftretenden Spannung hängt, wie eingehende Versuche zeigten, von der Auswahl der beiden Elektrodenstoffe ab und liegt etwa zwischen 1 bis 2 Volt.

Unsere „Elektrolytzelle", auch galvanisches Element oder kurz „Element"[2] genannt, machte bis zu ihrer praktischen Ausführung als Taschenlampenbatterie einige Wandlungen durch (Abb. 96). So wird die Zinkelektrode zugleich als Becher für die Aufnahme der übrigen Teile ausgebildet; ein daran gelöteter Draht bildet den negativen Pol (Kathode). Anstatt des teuren Kupfers benutzt man, wie schon erwähnt, als Anode ein Kohlestäbchen; an seinem frei herausragenden Ende erhält dieses eine aufgepreßte Messingkappe mit angelötetem Anschlußdraht. Schwefelsäure ist bei Undichtigkeit des Gefäßes für die Kleidung gefährlich. Als vorteilhafteren Elektrolyten verwendet man eine Salmiaklösung[3] an Stelle von Schwefelsäure. Durch Beigabe von Gelatine bildet man aus der Salmiaklösung eine feuchte Paste, die, wie sich zeigte, elektrisch der Lösung gleichwertig ist, aber nicht auslaufen kann. Da sich während des Umsetzungsvorganges an der Kohle Wasserstoffgas bildet, das den Stromdurchgang stören würde, umgibt man die Kohle mit einem

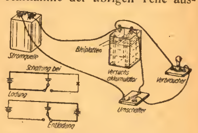


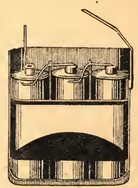
Abb. 94 Versuchsanordnung zum Speichern von Elektrizität.

[1] Abb. 93 bis 98 wurden aus dem Buch „Spannung — Widerstand — Strom", herausgegeben vom Reichsinstitut für Berufsbildung, Verlag B. G. Teubner, Leipzig, entnommen.

[2] Nicht verwechseln mit dem chemischen Grundstoff oder Element!

[3] Salmiak ist ein aus Ammoniakgas und Salzsäure gebildetes Salz.

kleinen Beutel mit Braunsteinfüllung, einem sauerstoffreichen Mineral, das den abgespaltenen Wasserstoff chemisch bindet. Eine kleine Pappscheibe mit darüber geschütteter Vergußmasse schließt das Element nach außen dicht ab. Ein fabrikneues Element dieser Art liefert 1,5 Volt, durch 3 solcher Elemente in der Schaltung nach Abb. 95 gibt man der Taschenlampenbatterie eine Gesamtspannung von $3 \cdot 1,5 = 4,5$ Volt.


Abb. 95
Taschenlampenbatterie

Für den Aufbau eines Stromelementes erkannten wir als wichtig: Es sind zwei untereinander chemisch verschiedene Metallelektroden nötig, von denen eine durch eine Kohleelektrode ersetzt sein kann. Beim Hineinstellen in einen chemisch wirksamen Elektrolyten liefern die Elektroden zwischen ihren frei herausragenden Enden eine elektrische Spannung. Die Höhe der Spannung hängt von der Stoffauswahl für die Elektroden ab und liegt etwa zwischen 1 und 2 Volt.

Einen erheblichen Fortschritt in der chemischen Stromerzeugung ergab folgende Entdeckung (Abb.94): Zwei in verdünnte Schwefelsäure gestellte Bleiplatten, die zunächst keine Spannung nach außen abgeben können, werden etwa 5 Minuten mit Gleichstrom beschickt. Dabei verändert sich die an den Pluspol angeschlossene Platte chemisch an der Oberfläche. Schalten wir den Strom ab und legen an beide Platten einen Spannungsmesser, so zeigt dieser etwa 2 Volt an. Für kurze Zeit können wir mit dieser Zelle eine elektrische Klingel oder eine kleine Glühlampe betreiben.

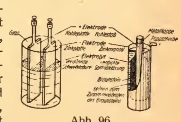


Abb. 96
Naß- und Trockenelement

Die Wirkung hört bald auf, kann aber durch Wiederholung des Verfahrens beliebig oft wieder eingeleitet werden. Wir haben es hier mit dem Urbild eines Sammlers zu tun, der den Vorzug besitzt, daß wir ihn mit Strom beschicken und „laden" können, um ihn hernach an beliebigem Orte als Stromquelle zu benutzen. Wir können also damit Elektrizität speichern. Der Bleisammler machte ebenfalls bis zu seiner heutigen Vollendung einige z. T. auch vom Verwendungszweck und Ort abhängige Wandlungen durch. Das in Abb. 97 dargestellte Ausführungsbeispiel eines Bleisammlers läßt die Verwendung gitterförmiger, in vielen Abarten auftretender Platten erkennen; diese werden mit Bleioxyd zwischen dem Gitterwerk gefüllt und in verdünnte Schwefelsäure gesetzt, die selbst in einem Glasgefäß[1] unter-

[1] Es werden auch eine Anzahl anderer isolierender Kunststoffe für das Gefäß benutzt; am bekanntesten sind unter anderem Hartgummi, Celluloid und viele neuere Kunststofferzeugnisse.

gebracht ist. Um eine größere Oberflächenwirkung zu erzielen, vergrößert man die Zahl der an einer Polklemme hängenden Platten; diese sind durch eine Polbrücke zusammengefaßt. Die abwechselnd ineinander geschachtelten Platten sind durch Isolierstücke mechanisch getrennt. Die Platten werden voll mit Säure bedeckt. Der geladene Sammler zeigt an den Plusplatten das kräftig dunkelbraune Aussehen von Bleisuperoxyd; die Minusplatten sehen silbergrau aus. Entladen wir den Sammler, so gehen das Bleisuperoxyd der Plusplatten und das Blei der Minusplatten allmählich unter Mitwirkung der Schwefelsäure in schwefelsaures Blei über; die Spannung ändert sich dabei langsam ab-

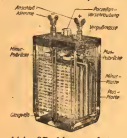


Abb. 97 Akkumulator

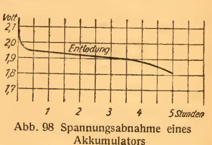


Abb. 98 Spannungsabnahme eines Akkumulators

nehmend nach Abb. 98. Bei der auf die Entladung folgenden Wiederladung muß der Strom die inzwischen gebildeten Schichten des schwefelsauren Bleies wieder in Bleisuperoxyd an den Plusplatten und reines Blei an den Minusplatten zurückverwandeln; er leistet dabei elektrische Arbeit, die größtenteils hernach wieder für die Entnahme bei der Entladung zur Verfügung steht. Die Schwefelsäure nimmt beim Entladen durch die Plattenveränderung gebildetes Wasser auf, sie wird verdünnt; beim Laden kehrt sich der Vorgang unter dem Zwange des Stromes wieder um. Die hierdurch bedingte Veränderung der Säurewichte gibt ein Bild des Lade- und Entladezustandes.

Neben dem Bleisammler erlangte der sogenannte alkalische Sammler wegen seines geringen Gewichtes, seiner höheren Lebensdauer, seines hohen Wirkungsgrades und seiner robusteren Bauart steigende Bedeutung. Die Elektroden dieses Sammlers bestehen aus Stahlgittern mit Röhren oder Taschen für die wirksame Masse. Die Plusplatten füllt man mit nickelhaltigen Stoffen, die Minusplatten entweder mit Stoffen, die Eisen oder Cadmium oder ein Gemisch aus beiden enthalten. Das Sammlergefäß ist gleichfalls aus Stahl. Als Elektrolyt dient verdünnte Kalilauge. Die Spannung der alkalischen Zellen ist etwa zwei Drittel derjenigen der Bleizellen.

Aus der großen Zahl weiterer Beispiele elektrochemischer Vorgänge sollen noch zwei der bedeutendsten genannt werden.

Das in der Elektrotechnik viel verwendete Kupfer wird als besonders reines Elektrolytkupfer gewonnen. Das gewöhnliche Rohkupfer wird

hierzu chemisch aufgelöst; etwaige geringe Beimengungen von Edelmetall scheiden sich auf dem Bottichboden als Schlamm ab. Bei der Wiedergewinnung des Kupfers schlägt man dieses aus der erhaltenen Lösung an dünnen Blechkathoden von reinem Kupfer elektrochemisch nieder. Die zuletzt erhaltenen Kupferplatten werden durch Umschmelzen, Gießen, Pressen, Walzen und Ziehen weiterverarbeitet.

Ferner sei auf die Aluminiumgewinnung durch Elektrolyse hingewiesen. Für den Flugzeugbau, die Elektrotechnik und den Leichtmetallbau hat dieser Zweig der Elektrotechnik ganz besondere Bedeutung erlangt. Der als Ausgangsstoff dienende Bauxit wird chemisch zu Tonerde (Aluminiumoxyd) verarbeitet. Diese ist in Wasser unlöslich, löst sich aber in geschmolzenem Kryolith — einer besonderen Aluminiumverbindung — und wird deshalb in diesem Zustand durch den Strom zur Abscheidung des Aluminiums gezwungen. Das Kryolith-Tonerde-Gemisch wird in einem mit Kohle ausgekleideten elektrischen Schmelzofen durch Lichtbogenwirkung geschmolzen. Die Kohleauskleidung ist zugleich Kathode. Der Schmelzprozeß wird mit Kohle-Anoden auf dem Boden des Ofens durch einen Lichtbogen eingeleitet. Alsbald beginnt im eingeschmolzenen Elektrolyten die Metallabscheidung. Das flüssige Aluminium wird dem Ofen durch Abstich entnommen und zu handelsüblichen Blöcken oder Barren weiterverarbeitet. Der Ofen dient also zugleich zum Schmelzen und zur Elektrolyse.

Die magnetischen Wirkungen des elektrischen Stroms

Daß sich elektrische Energie in magnetische Energie umformen, also mit elektrischem Strom eine magnetische Kraftwirkung erzeugen läßt, ist wohl heute jedem bekannt.

Wem wäre so z. B. nicht die Wirkungsweise der einfachen Klingel verständlich? Solange man den Klingelknopf drückt, schwingt der Klöppel und bringt die Glocke zum Tönen. Und wie kommt es zu diesem Schwingen?

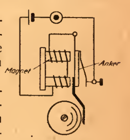


Abb. 99 Wecker

Der Anker (Abb. 99) mit dem Klöppel wird bei Stromschluß (Drücken des Knopfes) von einer Drahtspule angezogen, die bei Stromdurchgang zu einem Magneten geworden ist. Der Anker unterbricht dabei den Stromkreis, so daß der Magnet nicht mehr wirksam sein kann. Der Anker fällt ab und schließt den Stromkreis erneut. Der Pendelvorgang besteht so lange, als der Klingelknopf gedrückt wird. Der elektrische Strom erzeugt also eine magnetische Kraft, die Spule wird zu einem Magneten.

Wie kommt es nun, daß eine Drahtspule, die auf einen Eisenkern geschoben ist, bei Stromdurchgang magnetische Wirkungen hervorruft? Wir betrachten zu diesem Zweck einen einfachen Versuch. Ein gerades

Drahtstück wird von Gleichstrom durchflossen. Der Draht wird senkrecht durch ein Pappenstück geführt. Eisenfeilspäne werden dünn aufgestreut, sie ordnen sich zu deutlich sichtbaren Kreisen (Abb. 100). Wir nennen diese Kreise Kraftlinien. Sie bilden zusammen das Kraftlinienfeld oder magnetische Feld des Leiters. Mit einer Magnetnadel können wir eine bestimmte Kraftwirkung, einen Drehsinn, feststellen. Zum leichteren Merken bedienen wir uns einer einprägsamen Regel, der sogenannten Korkenzieherregel. Sie besagt: Schraubt man einen Korkenzieher in der Richtung des Stromes vorwärts, so dreht sich der Nordpol im Sinne des Korkenziehers.

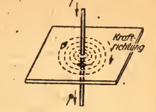


Abb. 100 Kraftlinienfeld eines Einzelleiters

Führen wir einen stromdurchflossenen Leiter an einer Magnetennadel entlang (Abb. 101), so wird die Nadel abgelenkt. Die Ablenkung ist besonders stark, wenn vor Stromdurchgang Nadel und Draht gleiche Richtung haben. Zur Richtungsfeststellung haben wir wieder eine Regel, die „Rechtehandregel". Legt man die rechte Hand so in den stromdurchflossenen Leiter, daß der Strom zu den Fingerspitzen fließt, wobei die innere Handfläche der Magnetnadel zugekehrt ist, so bewegt sich der Nordpol in der Richtung des ausgestreckten Daumens. Die Ablenkung ist um so stärker, je stärker der Strom ist.

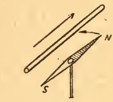
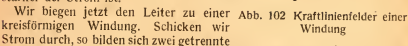


Abb. 101 Ablenkung der Magnetennadel



Abb. 102 Kraftlinienfelder einer Windung



Wir biegen jetzt den Leiter zu einer kreisförmigen Windung. Schicken wir Strom durch, so bilden sich zwei getrennte und gegeneinander gerichtete magnetische Kraftfelder, da der Stromverlauf in den beiden Halbbogen entgegengesetzt ist (Abb. 102). Die gleichgerichteten Kraftfelder in den Windungsteilen a und b vereinigen sich; sie bilden also ein gemeinsames und verstärktes Kraftfeld. Verwenden wir eine größere Anzahl von Windungen, also eine Spule, so erreichen wir eine weitere Verstärkung der magnetischen Wirkung. An Stelle der konzentrischen Kreise bei einem gradlinigen Leiter bilden die Kraftlinien bei einer Windung exzentrische Kreise, die bei einer Spule in unregelmäßig geschwungene Linien übergehen. Bei eng gewickelten Spulen verlaufen die Kraftlinien innerhalb der Spule gradlinig, und wir erhalten praktisch ein gleichmäßiges (homogenes) Feld (Abb. 103 bis 105).

Die stromdurchflossene Spule wirkt wie ein Magnet. Die magnetischen Kraftlinien durchziehen das Spuleninnere. Sie treten am Nordpol aus und

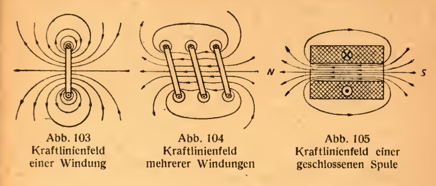


Abb. 103
Kraftlinienfeld
einer Windung

Abb. 104
Kraftlinienfeld
mehrerer Windungen

Abb. 105
Kraftlinienfeld einer
geschlossenen Spule

am Südpol wieder ein. Die Korkenzieherregel, auf ein Windungsstück angewendet, ergibt wieder den Verlauf der Kraftlinien. In den Abb. 103 bis 105 ist an den Schnittstellen der Windungen mit der Papierebene die Stromrichtung durch Kreuze und Punkte angegeben. Ein Kreuz besagt, daß der Strom vom Beschauer wegfließt (Gefieder eines Pfeiles), ein Punkt, daß er auf den Beschauer zufließt (Spitze eines Pfeiles).

Zwei Größen bestimmen die magnetische Kraft einer stromdurchflossenen Spule. Die magnetische Kraft wächst:

1) mit der Stärke des durch den Leiter fließenden Stroms (I),

2) mit der Anzahl der Spulenwindungen (w).

Die magnetische Kraft wird demnach bestimmt durch das Produkt $I \cdot w$. Der Ausdruck $I \cdot w$ heißt Amperewindungszahl (AW).

Eine Spule mit 60 Windungen z. B. hat bei 4 A Stromstärke die gleiche magnetische Kraft wie eine Spule mit 80 Windungen und 3 A Stromstärke, in beiden Fällen also 240 AW.

Welchen Zweck hat nun die Verwendung eines Eisenkernes in den Spulen der Klingel? Wir erhalten eine weitere und sogar wesentliche Verstärkung des Kraftlinienfeldes, wenn wir in eine stromdurchflossene Spule einen Weicheisenkern bringen. Bei Stromdurchgang werden die Molekularmagnete des Eisenkernes, d. s. die kleinen Teilmagnete, aus denen man sich das Eisen zusammengesetzt denkt, durch das Kraftlinienfeld der Spule gerichtet. Der Eisenkern wird selbst zum Magneten und bleibt es während der Dauer des Stromdurchganges. Nach Unterbrechung verschwindet der Magnetismus im Eisen bis auf einen Restmagnetismus.

Die Form des Eisenkernes ist nicht ohne Einfluß auf die Stärke des Magnetfeldes. Geben wir dem Eisen eine Hufeisen- (Abb. 106) oder Mantelform (Abb. 107), so können die Kraftlinien nur an dem kleinen Luftzwischenraum in den Luftraum entweichen. Sie werden daher noch

stärker zusammengefaßt. Es ist selbstverständlich, daß bei einem Hufeisenelektromagneten nur dann eine Magnetwirkung hervorgerufen wird,

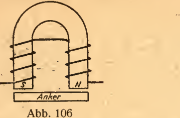
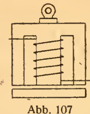
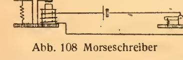


Abb. 106
Eisenkern in Hufeisenform


Abb. 107
Eisenkern in Mantelform

wenn bei zwei Spulen (je Schenkel eine) die Spulen richtig, und zwar gegeneinander geschaltet sind, so daß ein Nordpol und ein Südpol entstehen kann. Die Wicklung muß nicht über die ganze Länge des Eisens verteilt werden, sondern kann in besonderen Spulen zusammengefaßt sein.

Technische Anwendungen des Elektro-


Abb. 108 Morseschreiber

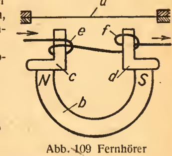


Abb. 109 Fernhörer

magneten gibt es in unabsehbarer Fülle. Die Abbildungen 108 bis 112 geben einen Einblick in die Wirkungsweise einiger Anwendungsbeispiele. In der

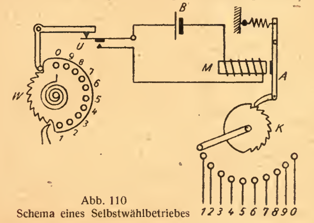


Abb. 110
Schema eines Selbstwählbetriebes

Fernmeldetechnik spielt der Elektromagnet eine wichtige Rolle. So ist der Hauptbestandteil des Morseschreibers (Abb. 108) ein Elektromagnet. In der Hörmuschel des Fernsprechers (Abb. 109) finden wir Magnetspulen. Der Selbstwählerbetrieb unserer Vermittlungsämter braucht die Arbeitsleistung unzähliger Schaltmagnete (Abb. 110). Starke Elektromagnete

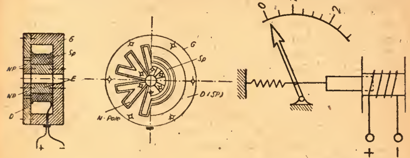


Abb. 111 Aufspannplatte

Abb. 112 Schema eines elektromagnetischen Meßinstruments

helfen heute auf Schrotlagerplätzen beim Verladen des sperrigen Alteisens. Magnetische Aufspannvorrichtungen (Abb. 111) für Werkzeugmaschinen vereinfachen das Aufspannen von Arbeitsstücken aus Stahl während der Bearbeitung. Weicheisen- und Drehspulinstrumente (Abb. 112) zeigen den Stromdurchgang an und ermöglichen die Stromstärkemessung.

Über Arbeit und Leistung

Bei einem Neubau werden Ziegelsteine, Dachschiefer, Balken und Bretter mit einem Seilzug nach oben befördert. In der Gießerei werden Gießkübel und fertige Gußstücke mit einem Kran angehoben, in Aufzügen werden Personen und Güter hochgeführt. In all diesen Fällen wird Arbeit verrichtet. Die Lasten müssen durch entsprechende Kräfte gehoben werden. Je größer die Last, um so größer ist die aufzuwendende Kraft, und um so größer wird bei gleicher Hubhöhe die Arbeit. Wird die Last zwei-, drei-, fünf- oder zehnmal größer, so steigt auch die Arbeit auf das Zwei-, Drei-, Fünf- oder Zehnfache. Die Arbeit wächst aber auch mit der Vergrößerung der Hubhöhe. Wenn also die Hubhöhe verdoppelt oder versechsfacht wird, so steigt auch die Arbeit auf das Doppelte oder Sechsfache. Die Arbeit hängt in gleicher Weise ab von der aufgewendeten Kraft und von der Hubhöhe, die Arbeit (A) ist gleich Kraft (P) mal Weg (s). Als Formel geschrieben erhält man:

$$\boxed{A = P \cdot s}$$

Häufig wird die Kraft in kg und der Weg in m eingesetzt. Daraus ergibt sich für die Arbeit die Maßbezeichnung „Kilogrammeter" (abgekürzt kgm).

98. Beispiel: Eine Last Ziegelsteine von 400 kg wird 12 m hoch auf einen Bau befördert. Welche Arbeit ist aufzuwenden?
Lösung: $A = P \cdot s = 400 \cdot 12 =$ **4800 kgm.**

Nicht immer genügt es, nur zu wissen, wie groß eine Arbeit ist. Um sie voll beurteilen zu können, muß man auch die Zeit kennen, in der diese Arbeit ausgeführt wird. Wenn man bei einer Maschine, z. B. einem Kran, die Arbeit je Sekunde feststellt, dann ermittelt man die Leistung dieser Maschine. Die Leistung ist also die Arbeit in der Zeiteinheit, oder anders ausgedrückt: Die Leistung (N) ist gleich Arbeit (A) geteilt durch Zeit (t). Als Formel lautet das Ergebnis:

$$N = \frac{A}{t}$$

Die Arbeit wird in kgm, die Zeit in Sekunden (s) angegeben. Die Leistung hat daher die Maßbezeichnung „Kilogrammeter je Sekunde" $\left(\text{abgekürzt: } \frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right)$.

99. Beispiel: Eine Last von 2000 kg wird von einem Kran in 3 s um 1,5 m gehoben. Welche Leistung hat der Kran?
Lösung: Die aufgewendete Arbeit A ist gleich 2000 kg · 1,5 m oder 3000 kgm. Die Leistung des Kranes ergibt sich zu $N = \frac{A}{t} = \frac{3000}{3} = \mathbf{1000\,\frac{kgm}{s}}$.

Neben der Einheit $1\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ wird vielfach die Leistungseinheit 1 Pferdestärke (abgekürzt PS) verwendet. 1 PS entspricht $\mathbf{75\,\frac{kgm}{s}}$.

Krane, aber auch viele andere „Arbeitsmaschinen", werden durch Elektromotoren angetrieben. Gibt ein Kran eine Arbeit von z. B. 3000 kgm ab, dann muß der Elektromotor diese Arbeit als „elektrische Arbeit" dem Netz entnehmen, aus dem er gespeist wird. Die elektrische Arbeit, die im Vergleich zur „mechanischen" Arbeit des Kranes nur eine andere Form von Arbeit ist, mißt man nicht in kgm, sondern meist in „Kilowattstunden". Elektrizitätszähler zeigen die einem Netz entnommene elektrische Arbeit in Kilowattstunden (abgekürzt kWh) an. 1 kWh entspricht 367000 kgm. 1 kgm entspricht umgekehrt $\frac{1\text{ kWh}}{367000}$. Für die mechanische Arbeit des Kranes von 3000 kgm muß also eine elektrische Arbeit von $\frac{3000}{367000}$ oder rund 0,008 kWh aus dem Netz entnommen werden. Neben der Kilowattstunde gibt es auch noch andere Einheiten der elektrischen Arbeit wie die „Wattstunde" (Wh) und die „Wattsekunde" (Ws). Für 1 Ws liest man häufig 1 Joule[1] (J)

[1] So benannt nach dem Physiker Joule (sprich: Dschaul).

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh} = 1000 \cdot 60 \cdot 60 = 3600000 \text{ Ws}$$

Danach ist $1 \text{ kgm} = \frac{1 \text{ kWh}}{367000} = \frac{3600000 \text{ Ws}}{367000} = 9{,}8 \text{ Ws}$

1 kgm ist also $\approx$ 10 Ws.

Einer mechanischen Arbeit, z. B. einer Kranarbeit von 3000 kgm, würde demnach eine elektrische Arbeit von etwa $3000 \cdot 10 = 30000$ Ws entsprechen.

Die Tatsache, daß die Leistung gleich ist der Arbeit geteilt durch die für diese Arbeit nötige Zeit, gilt natürlich auch bei der elektrischen Leistung. Die elektrische Leistung mißt man in „Kilowatt" (abgekürzt kW) oder in „Watt"[1] (abgekürzt W).

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$$

Wenn einem Netz die elektrische Arbeit von 1 kWh gerade in 1 Stunde (abgekürzt h) entnommen wird, so ist die elektrische Leistung

$$\frac{1 \text{ Kilowattstunde}}{1 \text{ Stunde}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ kW}$$

Wird die gleiche Arbeit bereits in einer halben Stunde = 0,5 h entnommen, dann ist die Leistung $\frac{1}{0{,}5} = 2$ kW.

Es kommt in der Technik immer wieder vor, daß Pferdestärken in Kilowatt und Kilowatt in Pferdestärken umzurechnen sind. Hierfür gilt die Beziehung:

1 PS = 0,736 kW = 736 W

In der Praxis genügt es meist, wenn man 1 PS zu $\frac{3}{4}$ kW rechnet.

160. Beispiel: Ein Elektromotor hat eine Leistung von 20 PS. Diese Leistung soll in kW angegeben werden.

Lösung: 20 PS entsprechen einer elektrischen Leistung von rd. $20 \cdot \frac{3}{4} = $ **15 kW.**

Über Gleich- und Wechselstrom

In einem Stromkreis mit einem galvanischen Element oder einem Sammler als Stromquelle fließt der elektrische Strom stets in der gleichen Richtung und bei gleichem Widerstand auch stets gleich stark. Einen Strom dieser Art nennt man Gleichstrom.

Ändert dagegen ein Strom mit fortschreitender Zeit immer wieder seine Richtung und Stärke, so spricht man von einem Wechselstrom.

An Hand der Abb. 113 kann man sich ein Bild von der Eigenart des Wechselstromes machen. In der Stellung *1 — 1* des doppelpoligen Umschalters *b* fließt der von einem galvanischen Element *a*, also einer Gleichstromquelle, gelieferte Strom in der Richtung des stark gezeich-

[1] So benannt nach dem Ingenieur James Watt.

neten Pfeiles durch den Ohmschen Widerstand *R*. Dieser Widerstand kann z. B. eine Glühlampe sein. In der Stellung *2 — 2* des Umschalters *b* fließt der Strom in der Richtung des gestrichelten Pfeiles, also entgegengesetzt, durch *R*. Bewegt man den Umschalter ständig von Hand zwischen den beiden Stellungen *1 — 1* und *2 — 2* hin und her, dann wechselt der Strom durch *R* immer wieder seine Richtung; er ist zu einem Strom mit wechselnder Wirkung geworden.

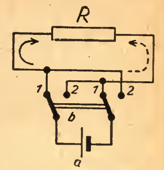


Abb. 113 Schaltung für die Erzeugung von Wechselstrom
a = galvanisches Element
b = doppelpoliger Umschalter
R = Ohmscher Widerstand (Glühlampe)

In der Elektrotechnik stellt man Wechselstrom allerdings nicht auf diese Weise her. Man erzeugt ihn vielmehr durch elektrische Maschinen.

Beide Stromarten haben ihre Vorzüge und ihre Nachteile. Gleichstrom kann in Sammlern (Akkumulatoren) für spätere Verwendung leicht gespeichert werden. Wechselstrom kann jedoch bequem auf hohe Spannungen bei kleinen Stromstärken gebracht („transformiert") werden. Diese Eigenschaft ist bei der Übertragung von elektrischer Arbeit (Energie) auf größere Entfernungen wertvoll. Dort muß der Strom unbedingt schwach sein, damit der Verlust durch Stromwärme in den Leitungen gering bleibt. Dagegen muß die Spannung hoch sein, damit sich trotz geringer Stromstärke große Energiemengen übertragen lassen.

Physikalische und chemische Vorgänge

Beim Kochen von Wasser bilden sich innerhalb des siedenden Wassers Blasen neben dem noch flüssigen Wasser. Es bildet sich dabei eine zweite Form des gleichen Stoffes, der aber dabei innerlich unverändert bleibt. Der Vorgang ist ein physikalischer.

Erhitzt man trockenen Zucker in einem Glaskolben, so wird aus diesem unter Blasenentwicklung und Verflüssigung des Kolbeninhalts Wasserdampf ausgeschieden, dem bald unter zunehmend gelblich-bräunlicher Tönung die Entwicklung brennbarer Gase von stechendem Geruch folgt. Die Fortsetzung des Versuchs ergibt unter immer dunklerer brauner Färbung einen neuen, „Karamel" genannten Stoff und zuletzt, unter Ausscheidung der letzten Gase, eine schwarze, feste Masse, in der der Chemiker Kohlenstoff erkennt. Dieser Vorgang ist ein chemischer.

Wo liegt der Unterschied?

Das Wasser konnte beim Kochen einer so grundlegenden Veränderung nicht unterzogen werden. Auch die Verdampfung bis zum letzten Tropfen

Wasser ergäbe nichts anderes als nur immer Wasser. Wir können den entstandenen Dampf durch Abkühlen wieder verflüssigen oder beim Entweichen in einen sehr kalten Raum zu Schneekristallen und Rauhreif an den Wänden werden lassen. Auch das ergibt keinen neuen Stoff; der Versuch zeigt aber, welche verschiedenen Formen und welches veränderte Aussehen der gleiche Stoff Wasser z. B. unter wechselnden Wärmezuständen annehmen kann.

Der Zucker erlitt eine innere Zerspaltung in eine Anzahl ihm völlig unähnlicher Stoffe mit ganz neuen Eigenschaften. Würden wir das aus dem Zucker ausgeschiedene Wasser zusammen mit den brennbaren Gasen und dem entstandenen Karamel oder gar mit dem zuletzt verbliebenen Kohlenstoff wieder räumlich zusammenführen und durch Abkühlung wieder zu Zucker vereinigen wollen, es gelänge uns nicht.

Der Unterschied beider Vorgänge ergab also:

Physikalische Vorgänge zeigen den in seiner Art unverändert bleibenden Stoff in einem den wechselnden „physikalischen" Bedingungen, z. B. der Temperaturänderung, angepaßten Zustande und können beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge eingeleitet werden.

Chemische Vorgänge haben Änderungen des behandelten Stoffes zum Inhalt, wobei sich neue Stoffe mit völlig neuen Eigenschaften ergeben. Deren rückläufige Umbildung zum Anfangsstoff zurück wäre ebenfalls eine Stoffumwandlung im chemischen Sinne und ist dadurch von physikalischen Vorgängen eindeutig unterschieden.

Das Beispiel des erhitzten Zuckers zeigt uns die Aufspaltung eines Stoffes in mehrere neue Stoffe. Lassen wir Schwefel in Sauerstoff verbrennen, so entsteht ein neuer, gasförmiger Stoff von stechendem Geruch, dessen Menge genau soviel wiegt als der verbrannte Schwefel und der zu seiner Verbrennung nötige Sauerstoff zusammen. Wir erkennen den Zusammenschluß zweier Stoffe Schwefel und Sauerstoff zu einem einzigen neuen Stoffe, dem „Schwefeldioxyd".

Dem Falle der Aufspaltung eines Stoffes in mehrere andere Stoffe, d. h. der „chemischen Zersetzung", steht also als Umkehrung gegenüber der Zusammenschluß zweier oder mehrerer Stoffe zu einem neuen Stoffe, d. h. die „chemische Verbindung".

Als Gesamtergebnis unserer Betrachtungen merken wir uns:

Chemische Vorgänge unterscheiden sich von physikalischen Vorgängen durch Umwandlung von Stoffen in andere Stoffe mit völlig neuen Eigenschaften; man spricht dabei von „chemischen Prozessen". Seinem Wesen nach kann der chemische Prozeß bestehen entweder in der chemischen Zersetzung eines Stoffes in zwei oder mehrere andere Stoffe, oder in der chemischen Verbindung zweier oder mehrerer Stoffe zu einem einzigen neuen Stoffe.

Chemische Verbindung, Elemente, Atome, Moleküle

Im vorausgegangenen Abschnitt wurde der Unterschied zwischen physikalischen und chemischen Vorgängen auseinandergesetzt und die zweifache Form des chemischen Prozesses dargelegt, einmal als chemische Zerlegung eines Stoffes in zwei oder mehrere andere Stoffe (Analyse), zum anderen umgekehrt als chemische Verbindung zwischen zwei oder mehreren Stoffen zu einem neuen Stoffe (Synthese).

Aufgabe des Chemikers ist es nun, die verschiedensten Stoffe auf ihre Bestandteile hin zu untersuchen. Wenn es sich um ein mechanisches Gemenge handelt, so ist eine solche Untersuchung sehr einfach. Mischen wir z. B. Eisenfeilspäne, die in jeder Werkstatt leicht zu beschaffen sind, mit einigen Gramm Schwefel, der, wie wir wissen, unter anderem zum Ausschwefeln von Fässern und Einmachtöpfen im Haushalt gebraucht wird, so können wir mit einem Magneten dieses Gemenge sehr einfach wieder trennen. Der Magnet zieht aus dem Gemenge die Eisenfeilspäne heraus und das Schwefelpulver bleibt zurück. Mischen wir dagegen 14 g Eisenspäne mit 8 g Schwefelpulver und erhitzen dieses Gemenge über einer Gas- oder Spiritusflamme, so glüht dieses Gemisch und eine grauschwarze Masse bleibt zurück. Gehen wir nun nach der Abkühlung wieder mit einem Magneten an die neu entstandene Masse heran, so geschieht — gar nichts. Es sind nämlich kein metallisches Eisen und kein freier Schwefel mehr vorhanden. Der Schwefel hat sich mit dem Eisen zu einem ganz neuen Stoff mit neuen Eigenschaften verbunden, nämlich zu Schwefeleisen.

Es ist eine chemische Verbindung entstanden. Chemische Verbindungen begegnen uns auf Schritt und Tritt, ohne daß wir uns dessen bisher bewußt geworden sind. So ist z. B. das Kochsalz eine chemische Verbindung. Es besteht aus dem Metall Natrium und dem Chlor. Chlor ist sehr giftig, es ist ein gelbgrünes Gas, das als Giftgas im Kriege Verwendung finden kann, im Weltkriege auch Verwendung gefunden hat. Auch das Natrium hat Eigenschaften, die sich für den menschlichen Körper schädlich auswirken. Haben sich diese beiden Stoffe jedoch chemisch verbunden, so entsteht das für den menschlichen Körper unschädliche Kochsalz. Ein anderes Beispiel: Denken wir an den Vorgang des Rostens! Wenn blankes Eisen in feuchter Luft liegen bleibt, so rostet es, d. h. das Eisen verbindet sich mit dem Sauerstoff der Luft. Aus dem vorher metallisch glänzenden Eisen entsteht ein ganz andersartiger Stoff, nämlich der Rost. Wir lernen aus diesen Beispielen: Bei einem chemischen Vorgang verlieren die daran beteiligten Stoffe ihre ursprünglichen Eigenschaften, es bilden sich vollständig andersartige Stoffe.

Der Chemiker kann nun auch die einzelnen Stoffe einer chemischen Verbindung in ihre Bestandteile zerlegen. So ist es möglich, die chemische Verbindung Schwefeleisen in Eisen und Schwefel zu zerlegen. Ein Teilchen Schwefeleisen läßt sich in ein Teilchen Schwefel und ein Teilchen Eisen zerlegen. Der Schwefel und das Eisen dagegen können nicht mehr zerlegt

werden. Stoffe, die nicht weiter zerlegbar sind, heißen Grundstoffe oder Elemente. Eisen, Schwefel, auch Natrium und Chlor sind Elemente.

In den unzählig vielen verschiedenen Stoffen, die auf der Erde vorkommen, wurden 92 verschiedene Grundstoffe (Elemente) gefunden, die also chemisch nicht weiter in andersartige Bestandteile zerlegt werden können. Alle tierischen und pflanzlichen Stoffe, alle Gesteine, Bodenschätze Erde, Wasser, alle Flüssigkeiten und viele Gase setzen sich aus einzelnen dieser Grundstoffe zusammen.

Zerlegen wir mechanisch einen Teil eines Grundstoffes, z. B. Eisen, in immer kleinere Teile, so kommen wir schließlich auf winzige Teilchen, die sich nicht mehr weiter teilen lassen. Ein solches kleinstes Teilchen heißt Atom. Wenn wir Kochsalz mechanisch zerkleinern, so kommen wir schließlich auch auf ein kleinstes Teilchen. Dieses Teilchen ist aber, wie wir schon wissen, noch zusammengesetzt; man kann es chemisch noch in die Grundstoffe Natrium und Chlor zerlegen. Das kleinste Teilchen einer solchen chemischen Verbindung, das durch mechanische Zerkleinerung erzielt werden kann, heißt Molekül. Wir prägen uns also fest ein:

Der kleinste Teil eines Grundstoffes heißt Atom, der kleinste Teil einer chemischen Verbindung dagegen Molekül.

Die gewonnenen Erkenntnisse fassen wir wie folgt zusammen:

Sämtliche in der Natur vorkommenden Stoffe sind chemisch entweder nicht weiter zerlegbare Grundstoffe, die wir Elemente nennen, oder aus Elementen zusammengesetzte Verbindungen, die nur durch chemische Prozesse voneinander getrennt werden können. Der Aufbau chemischer Verbindungen vollzieht sich nach bestimmten Naturgesetzen. Der kleinste Teil der chemischen Verbindung ist das Molekül; der kleinste Teil eines Elementes ist das Atom.

Die Elemente werden entsprechend ihrer Eigenschaften in zwei umfassende Gruppen eingeteilt: Metalle und Nichtmetalle.

Für alle chemischen Elemente sind bestimmte Kurzzeichen eingeführt. Man wählte hierzu die Anfangsbuchstaben der in der Wissenschaft üblichen, meist aus dem Lateinischen oder Griechischen stammenden Namen der Grundstoffe.

So bedeuten zum Beispiel:

Schwefel = S (lat. sulfur), Kohlenstoff = C (lat. carbonium), Sauerstoff = O (griech.-lat. oxygenium), Wasserstoff = H (griech.-lat. hydrogenium).

In mehreren Fällen wurde zur Vermeidung von Verwechselungen ein weiterer Buchstabe für das Kurzzeichen nötig, z. B.:

Silizium = Si, Selen = Se, zum Unterschied von Schwefel = S.; Chlor = Cl, Kalzium = Ca, Kobalt = Co, Kupfer = Cu, zum Unterschied von Kohlenstoff = C.

Das Kurzzeichen bedeutet jedesmal mengenmäßig 1 Atom des genannten Stoffes; z. B. versteht man unter C ein Atom Kohlenstoff.

Kurzzeichen bekannter Elemente

Nichtmetalle			Metalle					
			leichte Metalle			schwere Metalle		
Element	wissensch. Bezeichnung	Kurz-zeich.	Element	wissensch. Bezeichnung	Kurz-zeich.	Element	wissensch. Bezeichnung	Kurz-zeich.
Sauerstoff	Oxygenium	O	Kalium	Kalium	K	Eisen	Ferrum	Fe
Wasserstoff	Hydrogenium	H	Natrium	Natrium	Na	Zink	Zincum	Zn
Schwefel	Sulfur	S	Kalzium	Calcium	Ca	Chrom	Chromum	Cr
Chlor	Chlor	Cl	Magnesium	Magnesium	Mg	Zinn	Stannum	Sn
Stickstoff	Nitrogenium	N	Aluminium	Aluminium	Al	Kupfer	Cuprum	Cu
Phosphor	Phosphor	P				Nickel	Niccolum	Ni
Silizium	Silicium	Si				Blei	Plumbum	Pb
Kohlenstoff	Carbonium	C				Mangan	Manganum	Mn
						Quecksilber	Hydrargyrum	Hg
						Silber	Argentum	Ag
						Gold	Aurum	Au

Die Tabelle auf Seite 132 enthält die Kurzzeichen bekannter Elemente.

Die Kurzzeichen chemischer Verbindungen nennt man Formeln; sie werden aus den Kurzzeichen ihrer Aufbauelemente zusammengesetzt. Da das Molekül der Salzsäure ein Atom Wasserstoff und ein Atom Chlor enthält, lautet seine Formel HCl.

Die Moleküle vieler Verbindungen enthalten von einem Element mehrere Atome; man fügt dann dem Kurzzeichen des Elements noch die Zahl seiner beteiligten Atome rechts, eine halbe Zeile tiefer gestellt, hinzu. Ist in einem Molekül jedoch ein Element nur durch 1 Atom vertreten, so läßt man die Zahl 1 als selbstverständlich fort.

Das Wassermolekül hat 2 Atome Wasserstoff + 1 Atom Sauerstoff; Formel des Wassers: H_2O.

Das Molekül des kohlensauren Kalziums (kohlens. Kalk) enthält: 1 Atom Kalzium + 1 Atom Kohlenstoff + 3 Atome Sauerstoff; Formel für kohlensauren Kalk: $CaCO_3$.

Wenn uns für Gips die Formel $CaSO_4$ genannt ist, so entnehmen wir daraus umgekehrt, daß das Gipsmolekül enthält: 1 Atom Kalzium + 1 Atom Schwefel + 4 Atome Sauerstoff.

Die Legierung

Schmilzt man zwei oder mehrere Metalle zusammen, so entsteht eine Legierung. Die Atome der beteiligten Metalle gehen hierbei keine chemische Verbindung ein, sondern bestehen als selbständige, chemisch freie Bestandteile nebeneinander. Man bezeichnet eine Legierung auch als „feste Lösung". Es ergeben sich bei ihr im Vergleich zu den Eigenschaften ihrer unvermischten Bestandteile ganz abgewandelte physikalische und chemische Eigenschaften. Das trifft für die Gießfähigkeit zu, für die Festigkeit, Härte, Sprödigkeit usw. und somit auch für die Bearbeitbarkeit einer Legierung. Man gibt daher vielfach den Metallen zur Erlangung bevorzugter Eigenschaften im geschmolzenen Zustande ganz bestimmte Mengen anderer Metalle bei. Unsere Eheringe z. B. bestehen aus einer Gold-Kupfer-Legierung. Gold allein ist zu weich; solche Ringe würden sich sehr schnell abnutzen. Je mehr Kupfer zugesetzt wird, um so härter wird der Ring.

Zur Erzielung niedriger Schmelzpunkte verwendet man bei den Lötmetallen des Klempners für Weichlote nicht reines Zinn, sondern Zinn-Blei-Legierungen. Im reinen Zustande schmelzen: Blei bei 327°, Zinn bei 232°. Das Lot z. B. aus 2 Gew.-Teilen Zinn + 1 Gew.-Teil Blei aber schmilzt schon bei 180°. Ähnlich verhält es sich mit dem Hartlot, einer Legierung aus Kupfer (Schmelzpunkt 1083°) und Zink (419°).

Es gibt außerdem eine Anzahl besonders leicht schmelzbarer Legierungen, darunter das „Woodsche Metall“[1], das bei 67° flüssig ist: 4 Teile Wismut (271°) + 2 Teile Blei + 1 Teil Zinn + 1 Teil Cadmium (321°). Man benutzt diese Legierung u. a. in der Elektrotechnik für besonders wärmeempfindliche Feinsicherungen.

Von größter Wichtigkeit sind die vielen Arten legierter Stähle, die den verschiedenartigsten Anforderungen der Technik angepaßt sind. Eine hervorragende Rolle unter diesen spielen insbesondere die Werkzeugstähle (Schnitt-, Dreh-, Bohr-Stähle, Fräser usw.), sowie die zu den Panzerplatten der Wehrmacht verarbeiteten Sonderstähle. Ihre besondere Güte verdanken solche Legierungen oft nur ganz geringen Zusätzen beispielsweise von Chrom, Nickel, Kobalt, Wolfram, Vanadium, Molybdän zur Stahlschmelze. Die beigegebenen Metalle machen den Stahl je nach Wahl härter, zäher oder elastischer.

Im Rahmen der einheimischen Rohstoffversorgung gelang es der deutschen Technik, durch viele neuartige Legierungen den Bedarf an den vom Auslande einzuführenden Sparmetallen Kupfer und Zinn erheblich herabzudrücken. Kunstharzerzeugnisse gewinnen laufend an Bedeutung. Sie werden genau so wie viele neuartige Zinklegierungen auch nach dem Kriege als wertvolle Austauschstoffe weiter verwendet werden. Infolge der erreichbaren ausgezeichneten Festigkeits- und Verformungseigenschaften der neueren Zinklegierungen können wir heute dieses Metall aus den im Kriege wiedererlangten oberschlesischen Vorkommen in weitem Ausmaße an Stelle von Messing benutzen. Messing ist eine Legierung des Kupfers mit Zink, enthält also das Sparmetall Kupfer.

An hervorragender Stelle steht auch das Aluminium mit seinen vielen hochwertigen Legierungen durch Zusätze aus Magnesium, Mangan, Eisen und anderen Metallen. Als Hauptträger des Leichtmetallbaues brachte es uns u. a. auch die Möglichkeiten zu unserem schnellen Aufstieg und der Überlegenheit auf dem Gebiete des Flugwesens.

Wasser

Einer der wichtigsten Stoffe der Erde ist das Wasser. Es bedeckt etwa zwei Drittel der Erdoberfläche und ist auch in der Luft für uns unsichtbar als Wasserdampf enthalten. Fälschlicherweise wird die Bezeichnung Wasserdampf oft auf die weißen Wolken angewandt, die sich in der Luft beim Auspuff von Wasserdampf bilden. Diese Wolken bestehen jedoch aus winzigen Wassertröpfchen. In der Luft kann nämlich bei einer bestimmten Temperatur nur eine bestimmte Menge Wasserdampf enthalten sein; der Überschuß verdichtet sich zu kleinen Wassertröpfchen, wie wir das im Großen bei der Bildung des Taus, des Nebels und der Wolke beobachten

[1] Ausgesprochen: Wuddsches Metall.

können. Werden die Wassertröpfchen so groß, daß sie sich nicht mehr in der Schwebe halten können, so fallen sie zu Boden, es regnet.

Das Regenwasser fließt teils als Oberflächenwasser den Bächen, Flüssen und Seen zu; teils sickert es in den Boden ein, und teils verdunstet es wieder.

Trifft das Sickerwasser im Boden auf undurchlässige Schichten, so bilden sich Wasseransammlungen, die uns als Grundwasser bekannt sind. Beim Durchsickern durch den Boden entnimmt das Wasser dem Boden lösliche Stoffe. Diese sind den Pflanzen für ihr Wachstum unentbehrlich, müssen aber bei der Verwertung des Wassers in der Technik zum Teil wieder entfernt werden. Enthält das Wasser größere Mengen gelösten Kalk, so wird es als „hart" bezeichnet. Das meiste Quellwasser ist hart, während Regen- und Flußwasser weich sind. Hartes Wasser ist als Kesselwasser und Waschwasser ungeeignet und muß enthärtet werden. Nicht enthärtetes Wasser gefährdet in Dampfbetrieben den Kessel durch „Kesselstein"-Ablagerungen, die eine genügende Berührung zwischen Kessel und Wasser an einzelnen Stellen verhindern. Die dabei rotglühend werdenden Kesselteile verlieren ihre Festigkeit und haben eine Dampfkesselexplosion zur Folge.

Seewasser hat einen salzigen Geschmack, der in der Nordsee stärker als in der Ostsee ist. Die Wichte des Seewassers (Ostsee 1,015, Nordsee 1,025, Atlantik 1,03) deutet auf beachtliche Mengen gelöster Salze hin. Infolge seines Salzgehaltes greift Seewasser viele Metalle und Legierungen chemisch an. Deshalb können an Bord z. T. nur besondere Legierungen wie z. B. Marinebronze, Silumin, Hydronalium an Stelle sonst üblicher Werkstoffe benutzt werden. Da Seewasser für den Dampfbetrieb nicht geeignet ist, muß man auf See den mitgenommenen Wasservorrat durch nahezu salzfreies Wasser ergänzen, das in „Frischwassererzeugern" aus Seewasser durch Verdampfen und Rückverflüssigung des Dampfes gewonnen wird.

Wasserstoff und Sauerstoff

Durch elektrischen Strom kann man Wasser in zwei gasförmige Elemente, nämlich Wasserstoff und Sauerstoff, zerlegen. Vom Sauerstoff wissen wir, daß ihn Menschen und Tiere zum Atmen brauchen und Rettungsmannschaften für ihre Atmungsgeräte Stahlflaschen mit gepreßtem Sauerstoff mit sich führen. Vom Wasserstoff ist bekannt, daß er sehr leicht ist und zum Füllen von Ballonen und Luftschiffen verwendet wird.

Bei der Zerlegung des Wassers durch elektrischen Strom wird das kleinste Teilchen des Wassers, das Wassermolekül, in 2 Atome Wasserstoff und 1 Atom Sauerstoff aufgespalten. Die Formel für das Wasser lautet dementsprechend H_2O (gesprochen H zwei O).

Da im Wassermolekül 2 Atome Wasserstoff und nur 1 Atom Sauerstoff enthalten sind, entsteht bei der Zerlegung des Wassers auch doppelt soviel

Wasserstoff wie Sauerstoff. Mischt man die beiden Gase in diesem Verhältnis miteinander, so entsteht ein explosives Gasgemisch, das den Namen „Knallgas" trägt und bei der Entzündung Temperaturen von über 2000° erzeugt. Wie allgemein bekannt ist, werden Knallgasgebläse beim autogenen Schneiden und Schweißen benutzt. Beim Inbetriebsetzen dieser Gebläse ist zu beachten, daß man zuerst den Wasserstoff in den Brenner leiten und anzünden muß, bevor man den Sauerstoff zuführt. Bei sorgfältiger Handhabung ist jede Explosionsgefahr ausgeschlossen. Zur besseren Unterscheidung haben Wasserstoffflaschen einen roten Anstrich und Linksgewinde am Ventilanschlußzapfen, während Sauerstoffflaschen außer Rechtsgewinde auch noch einen größeren Durchmesser des Ventilanschlußzapfens besitzen.

Wasserstoff ist auch in den Kraftstoffen (Benzin, Benzol usw.) vorhanden. An Kohlenstoff gebunden, bildet er darin zahlreiche Gruppen von „Kohlenwasserstoffen", die wir u. a. aus dem Erdöl gewinnen. — Für die künstliche Gewinnung von Benzin und Buna[1] werden beträchtliche Wasserstoffmengen benötigt; als Ausgangsquelle hierfür nimmt man Wasser. Für die Benzinherstellung zersetzt man Wasserdampf beim Vorbeistreichen über glühenden Koks; der freigewordene Wasserstoff wird gereinigt und in bestimmter Weise chemisch an Kohlenstoff gebunden. Die so entstandenen Kohlenwasserstoffe werden unter Abkühlung zu Benzin verflüssigt. — Zur Herstellung von Buna läßt man Wasser in der allen Radfahrern bekannten Art der Azetylen-Laternen auf das aus Kohle und Kalk elektrochemisch zusammengeschmolzene Kalziumkarbid (CaC_2) wirken und erhält das aus Kohlenstoff und Wasserstoff bestehende Azetylen (C_2H_2). Aus diesem entsteht auf mühevollem Wege durch viele Zwischenstufen Buna, das man sich ebenfalls als eine verwickelt zusammengesetzte Kohlenwasserstoffverbindung vorstellen kann.

Sauerstoff ist das Element, das auf der Erde am häufigsten vorkommt. Sein Anteil beträgt etwa 50 Gewichtsprozent; jedoch ist weitaus der größte Teil in Verbindungen festgehalten. In der Luft ist er zu etwa 20% frei enthalten. Sauerstoff hat die Eigenschaft, sich mit vielen Elementen sehr leicht zu verbinden. Diesen Vorgang der Verbindung mit Sauerstoff nennt man „Oxydation". Den gegenteiligen Vorgang, bei dem aus einer Verbindung der Sauerstoff fortgenommen wird, bezeichnet man als „Reduktion". Jeder Verbrennungsvorgang ist nichts weiter als eine Oxydation, bei der eine Licht- und Wärmeentwicklung wahrgenommen wird. Die Verbindungen, die bei der Oxydation entstehen, nennt man „Oxyde". So heißt z. B. die Verbindung, die beim Verbrennen des Magnesiums der Leuchtrakete oder des Blitzlichtes entsteht, Magnesiumoxyd.

[1] Künstlicher Kautschuk.

Verbrennt im Ofen Kohle, so verbinden sich die verschiedenen Bestandteile der Kohle unter Wärmeabgabe mit Sauerstoff und die gasförmigen Oxyde entweichen durch den Schornstein nach draußen. Je mehr Sauerstoff einem brennenden Stoff zugeführt wird, desto lebhafter brennt er und desto größer wird die erzeugte Hitze. Einem Ofen, der gut brennen soll, muß man also ausreichend Sauerstoff, d. h. Luft zuführen. Beim Schmiedefeuer kann man durch erhöhte Luftzufuhr mittels des Blasebalgs den Verbrennungsvorgang steigern. Die größte Wärmeabgabe erzielt man jedoch, wenn man reinen Sauerstoff zuführt. So führt man bei Knallgasgebläsen dem Wasserstoffgas reinen Sauerstoff zu und erhält dadurch die zum Schneiden und Schweißen erforderlichen hohen Temperaturen.

Wird beim Verbrennen von Kohle zu wenig Sauerstoff zugeführt, so oxydiert der Kohlenstoff, der in der Kohle enthalten ist, zu dem giftigen Kohlenoxydgas CO, das farblos und auch geruchlos ist. Es bildet sich bei schlecht ziehenden Öfen und bei offenen Koksöfen, wie sie bei der Bauaustrocknung Verwendung finden, weswegen hier große Vorsicht geboten ist.

Es gibt auch Oxydationen ohne Lichtentwicklung. Man kann sie als langsame Verbrennungen bezeichnen. Es entsteht zwar eine ebenso große Wärmemenge wie bei der raschen Verbrennung, nur ist die Wärmeentwicklung nicht zu merken, da sie sich über einen größeren Zeitraum verteilt. Das Rosten des Eisens ist z. B. eine solche langsame Verbrennung. Zum Rosten von Eisen und Stahl ist es erforderlich, daß außer dem Sauerstoff gleichzeitig Wasser vorhanden ist. Die Rostgefahr ist also in Räumen mit feuchter Luft, wie Baderäumen und Ställen, am größten. Eisen und Stahl rosten, wenn sie nicht geschützt werden, solange, bis sie völlig zu Rost geworden sind. Bei anderen Metallen hingegen oxydiert nur die Oberfläche und bildet so eine Schutzschicht, die eine weitere Oxydation verhindert. Bei Eisen und Stahl muß die Schutzschicht bekanntlich durch besondere Schutzüberzüge gebildet werden.

Ein anderer langsamer Verbrennungsvorgang ist das Atmen bei Mensch und Tier. Beim Einatmen wird Sauerstoff aufgenommen, beim Ausatmen werden die gasförmigen Oxyde ausgeschieden.

Weiter ist das Verwesen und Vermodern der pflanzlichen und tierischen Stoffe ein Oxydationsvorgang. So oxydieren die im Wasser der Bäche, Flüsse und Seen schwebenden organischen Stoffe durch den Sauerstoff, der auch im Wasser in geringen Mengen zu finden ist. Es tritt damit eine gewisse Selbstreinigung der Flüsse ein.

Auch das Trocknen der Ölfarbe ist ein Oxydationsvorgang. Der Firnis, mit dem die Farbstoffe verrührt werden, verharzt durch Sauerstoffaufnahme und bildet so eine Schutzschicht. Als Arbeitsvorgang im Verbrennungsmotor verläuft die Oxydation des Treibstoffes plötzlich und unter starker Druck- und Wärmeentwicklung mit Stichflamme (vgl. auch Schießen, Sprengen).

Säuren

Die bekanntesten *anorganischen Säuren* sind wohl Salzsäure, Schwefelsäure, Salpetersäure, die bekannteste *organische* Säure ist Essigsäure.

Von Geschmack sind die Säuren, wie schon der Name sagt, sauer, doch läßt sich dieser saure Geschmack nur bei einem Teil der Säuren ohne Schaden für die Gesundheit feststellen. Das ist kein Nachteil, denn wir verfügen über einen Pflanzenfarbstoff, das Lackmus, mit dem wir das Vorhandensein von Säuren feststellen können. Blauer Lackmusfarbstoff wird durch Säuren rot gefärbt. Wollen wir bei einer Flüssigkeit prüfen, ob es sich um eine Säure handelt, so bringen wir einen Tropfen dieser Flüssigkeit auf einen schmalen Streifen blauen Lackmuspapiers. Färbt sich das Papier an der befeuchteten Stelle rot, so ist die Flüssigkeit eine Säure.

Außer dieser Fähigkeit, blauen Lackmus rot zu färben, ist allen Säuren weiter gemeinsam, daß sie als wesentlichen Bestandteil Wasserstoff enthalten, wie wir ohne weiteres aus den nachfolgenden Formeln ersehen können:

Salzsäure	HCl	Salpetersäure	H_2NO_3
Schwefelsäure	H_2SO_4	Kohlensäure	H_2CO_3

Salzsäure dient zum Reinigen verschmutzter Steinflächen und zur Herstellung von Lötwasser. Schwefelwasser wird unter anderem als Akkumulatorensäure gebraucht. Salpetersäure wird in der Metalltechnik zum Beizen, Brennen und Ätzen benutzt. *Kohlensäure ist stets im Wasser enthalten. Sie greift vor allem in Gegenwart von Sauerstoff die Wasserrohre an.* Diese „aggressive Kohlensäure“ kann durch Zusatz von gesättigtem Kalkwasser gebunden werden. In ungeschützten Eisenrohren bilden sich unter Einfluß der Kohlensäure die bekannten rotbraunen Flocken und Ansätze an den Rohrwandungen. Auch Kupfer, Zink, Nickel und Zinn werden von der Kohlensäure angegriffen, Blei nur, wenn das Wasser lufthaltig ist.

Fälschlich wird oft auch heute noch das Kohlendioxyd CO_2 als Kohlensäure bezeichnet, wie z. B. bei Bierdruckapparaten, wo es das Bier aus dem Keller zum Ausschank preßt. Tatsächlich aber ist eine Säure nur festzustellen, wenn das Kohlendioxyd sich mit Wasser zu Kohlensäure verbunden hat:

$$CO_2 + H_2O = H_2CO_2$$

Basen

So wie es Flüssigkeiten gibt, welche blaues Lackmuspapier rot färben, gibt es auch Flüssigkeiten, die rotes Lackmuspapier blau färben. Das sind die Basen, die man wegen ihrer laugenhaften ätzenden Eigenschaften auch Laugen nennt. Als wesentlichen Bestandteil enthalten alle Formeln für

Basen die OH-Gruppe, so z. B. bei der Natronlauge Na(OH) und beim Salmiakgeist NH_4 (OH). Natronlauge entsteht beim Waschen mit Seife, Salmiakgeist ist uns als Mittel zum Entfernen von Flecken bekannt. Auch das Kalkwasser ist eine Lauge. Wir kennen alle die ätzende Eigenschaft des gelöschten Kalkes.

Salze

Der Name Salz ist durch das Kochsalz allgemein bekannt. Salze entstehen dadurch, daß man Säuren mit Basen oder Metallen zusammenbringt. Als Salz bezeichnet man alle Verbindungen, die aus Metall und Säurerest bestehen. Bei der wissenschaftlichen Benennung der Salze hängt man an den Namen des Metalls einen Gruppennamen, der angibt, von welcher Säure das Salz gebildet worden ist. So heißen die Salze der Salzsäure Chloride, die der Schwefelsäure Sulfate, die der Salpetersäure Nitrate und die der Kohlensäure Karbonate.

Das Kochsalz ist ein Salz der Salzsäure und führt demnach den wissenschaftlichen Namen Natriumchlorid. Auch das Zinkchlorid ist, wie der Name sagt, ein Salz der Salzsäure. Man erhält es bei der Herstellung des Lötwassers durch Auflösen von Zink in Salzsäure. Zinkchlorid dient auch zum Konservieren von Holz und als Schutzmittel gegen Schwamm.

Von den Salzen der Schwefelsäure seien der Gips und Kalziumsulfat erwähnt. Die Nitrate sind bekannt unter dem Namen Salpeter, so der Chilesalpeter und der Kalisalpeter. Die bekanntesten Salze der Kohlensäure, also Karbonate, sind das Natriumkarbonat, das als Soda zu Reinigungszwecken viel benutzt wird, sowie das als Kreide und Marmor vorkommende Kalziumkarbonat $CaCO_3$, auch Kalkstein oder kohlensaurer Kalk oder kurz Kalk genannt. Wird der Kalk gebrannt, so entsteht Branntkalk, und Kohlendioxyd wird frei:

$$CaCO_3 = CaO + CO_2$$

Durch Übergießen mit Wasser wird der Kalk gelöscht. Man erhält den Löschkalk, auch Ätzkalk genannt:

$$CaO + H_2O = Ca(OH)_2$$

Zusammen mit Sand und Anmachwasser bildet er den Mörtel und erstarrt nach seiner Verarbeitung unter Aufnahme von Kohlendioxyd und Abgabe des freiwerdenden Wassers zu Kalkstein:

$$Ca(OH)_2 + CO_2 = CaCO_3 + H_2O$$

Die bereits erwähnten Koksöfen, die bei der Bauaustrocknung in den Räumen aufgestellt werden, sollen nicht nur das Verdunsten der Baufeuchtigkeit beschleunigen, sondern sie sollen auch das zum Erhärten des Mörtels erforderliche Kohlendioxyd liefern.

Technisches Skizzieren und Zeichnen

Bautechnisches Zeichnen

Die zeichnerische Darstellungsweise im Hochbau ist grundsätzlich die gleiche wie im Maschinenbau. Man findet jedoch auch vielfach noch Abweichungen von der normgerechten Darstellung, Bemaßung und Beschriftung. Die Anordnung der Ansichten oder Risse erfolgt wie im Maschinenbau.

Der Grundriß oder die Draufsicht wird für die einzelnen Geschosse allgemein im Schnitt dargestellt. Dabei werden die Schnittflächen des Mauerwerkes schwarz angelegt (Abb. 114).



Abb. 114 Hausgrundriß

Man findet aber auch hier sehr oft eine Schraffung, wie sie für Bauteile des Maschinenbaues üblich ist, besonders deshalb, weil das Anlegen in Schwarz mit dem Bleistift nicht immer gut aussieht und außerdem zeitraubend ist.

Für die zeichnerische Ausführung gilt folgendes: Bei Mauerwerk aus Backsteinen, Klinkern, Kalksandsteinen, Hausteinen, Schwemmsteinen und Bruchsteinen wird die Schnittfläche nach den Normen schwarz angelegt (Abb. 114). Bauwerke aus Zement-, Kalk- und Stahlbeton werden nach Abb. 115 dargestellt; natürliches Erdreich, sogenannter gewachsener Boden, wird nach Abb. 116 gekennzeichnet. Füllmassen aus Asche, Schlacke, Sand, Torfmull usw. werden durch kleine unregelmäßige Punkte wie in Abb. 117 veranschaulicht. Balken, Verbandhölzer, Bretter, Bohlen usw.



Abb. 115 Beton — Abb. 116 Erdreich — Abb. 117 Füllmassen — Abb. 118 Abb. 119 Holz

werden im Schnitt durch kreuzweise Schraffung wiedergegeben (Abb. 118). Auch hier findet man noch eine Wiedergabe durch einfache Schraffung nach Abb. 119. Hirnholz zeichnet man in der Ansicht durch Eintragung von zwei Diagonalen (Abb. 120). Langholz wird nicht geschnitten dargestellt (Abb. 121). Stahlprofile im Schnitt werden bei kleinem Maßstab durch einfache Striche angedeutet. Bei größeren Maßstäben läßt man oben und links sogenannte Lichtkanten stehen, damit sich die einzelnen Teile besser abheben (Abb. 122).

Die Anwendung der verschiedenen Darstellungen zeigt Abb. 123, die einen Hauseingang in Aufriß und Grundriß darstellt.

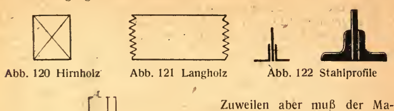
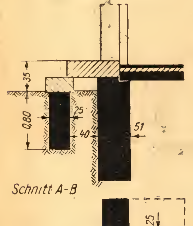


Abb. 120 Hirnholz Abb. 121 Langholz Abb. 122 Stahlprofile

Zuweilen aber muß der Maschinenbauer bei Einzeichnung seines Entwurfs in Bauwerke angeben, an welchen Stellen Mauerwerk beseitigt oder neu angelegt werden muß. In einem solchen Falle wird das abzubrechende Mauerwerk gelb und das neu anzulegende Mauerwerk rot angelegt. Die farbige Kennzeichnung von Beton ist blaugrau. Bei Erdreich wird die abwechselnde Schraffung durch braune Austuschung ersetzt.

Man ersieht aus Abb. 123 auch die Eintragung der Maßlinien und Maßzahlen. Während im Maschinenbau alle Maße in Millimeter angegeben werden, erfolgt die Maßangabe im Hochbau in Metern, Zentimetern und sehr selten in Millimetern. Dabei verfährt man folgendermaßen: Hauptabmessungen in Entwurfszeichnungen und Lageplänen werden in Metern mit zwei Dezimalen angegeben. Mauern, Decken sowie kleine Vorsprünge werden



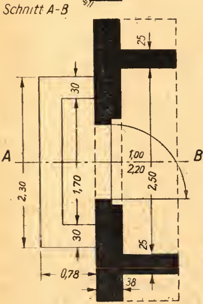


Abb. 123 Hauseingang

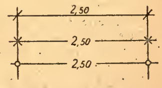


Abb. 124 Nicht normgerechte Begrenzung von Maßlinien

in Zentimetern bemaßt. Lichtmaße von Schornsteinen, Gasabzugsrohren und Luftschächten werden ebenfalls in Zentimetern angegeben. Dabei wird die Breite zur Länge in Form eines Bruches mit schrägem Bruchstrich eingetragen, beispielsweise 14/21. Auf dieselbe Weise bemaßt man auch Holzquerschnitte als Verhältnis von Breite und Höhe (Abb. 125).

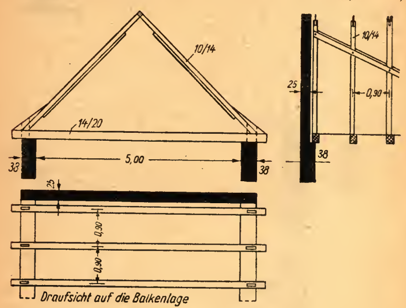


Abb. 125 Einfaches Satteldach

Die Rohbaumaße von Fenstern und Türen werden entlang der Achsen so eingetragen, daß die lichte Breite über der Achse und die lichte Höhe unter der Achse stehen. Die Begrenzung der Maßlinien nach Abb. 124 ist nicht normgerecht; sie wird aber noch häufig angetroffen.

Teilzeichnungen der Mauer- und Zimmerkonstruktionen werden in Zentimetern bemaßt, diejenigen der Stahl-, Tischler- und Klempnerkonstruktionen in Millimetern.

Zusammenfassend sei bemerkt: Hauptmaße für Maurerarbeiten in Metern, die Maße für Teilzeichnungen der Maurer-und Zimmererkonstruktionen in Zentimetern und die Maße für Stahl, Tischler- und Klempnerkonstruktionen in Millimetern angeben! Die in Metern angegebenen Lichtmaße von Grundrissen und Höhen sollen immer Rohbaumaße sein. Trifft dies nicht zu, so ist dies besonders zu bemerken.

Nationalpolitik

Die Aufrichtung des Großdeutschen Reiches durch Adolf Hitler

Wir stehen mitten im größten Kriegsgeschehen, das uns durch die Westmächte, vor allem durch England, aufgezwungen wurde. Als unsere Gegner sahen, daß durch die Tat eines Mannes ihre Pläne gegenüber Deutschland vernichtet wurden, hetzten sie zum Krieg. Ein mächtiges, einiges Deutsches Reich in der Mitte Europas war für unsere Reichsfeinde von 1870 und 1914 nicht tragbar. Dieses Reich hatten sie gerade durch das Schanddiktat von Versailles vernichten wollen.

Wir kennen alle die einzelnen demütigenden und grausamen Bestimmungen dieses Gewaltfriedens. Den achten Teil unserer Bodenfläche und den zehnten Teil unserer Bevölkerung und dazu unsere Kolonien hatte man uns geraubt. Wirtschaftsnot, Geldentwertung und Arbeitslosigkeit brachten unsagbares Elend über unser Volk. Die kommunistische Seuche gefährdete den Bestand unseres Reiches. Die Allgemeine Wehrpflicht wurde verboten, alle schweren Waffen und die Luftwaffe abgeschafft und uns nur ein Heer von 100000 und eine Marine von 15000 Mann gelassen. Selbst das Höchste, die Ehre, hat man versucht, dem deutschen Volke zu nehmen. Es wurde gezwungen, in seiner Unterschrift unter das Diktat sich selbst für schuldig am Ausbruch des Weltkrieges zu bekennen.

Viele deutsche Menschen haben schwer unter dieser Schmach gelitten. Aber einer hat die letzte Schlußfolgerung daraus gezogen. Das war Adolf Hitler. Wir alle kennen seinen Werdegang, die harte Lebens- und Leidensschule, die er hat durchmachen müssen. Wir wissen von seinem unermüdlichen Kampf nach der Novemberrevolte 1918 und von dem dornenvollen Weg über den mißglückten Versuch einer nationalen Erhebung am 9. November 1923, über seine Gefangenschaft auf der Festung Landsberg bis zu seiner Berufung zum Reichskanzler durch Generalfeldmarschall von Hindenburg am 30. Januar 1933.

Am „Tag von Potsdam", am 21. März 1933, haben sich am Grabe Friedrichs des Großen das alte Bismarck-Deutschland in der Person Hindenburgs und das junge nationalsozialistische Deutschland in der Person Adolf Hitlers die Hand gereicht.

Nach der Machtübernahme geht der Führer mit ungeheurer Energie und einem unerschütterlichen Glauben an Deutschlands Sendung daran, das Reich neu aufzurichten. Die Parteien werden aufgelöst oder tun es selber. Die Gründung neuer Parteien wird durch Gesetz verboten. Die NSDAP. ist der alleinige politische Willensträger des Volkes.

Neben der Parteizersplitterung war die Sonderbündelei, der Gegensatz zwischen dem Reich und den Ländern, immer eine der gefährlichsten Brut-

stätten der deutschen Uneinigkeit gewesen. Der Führer schweißt daher das neue Reich zum Einheitsstaat zusammen. Diese Umgestaltung vollzieht sich in dem „Neuaufbaugesetz". Dieses beseitigt die Parlamente der Länder und nimmt den Einzelstaaten Preußen, Bayern, Sachsen usw. ihren Charakter als Einzelstaaten.

Nach dem Ableben des Generalfeldmarschalls von Hindenburg (2. August 1934) wird das Amt des Reichspräsidenten mit dem des Reichskanzlers verbunden. Seitdem ist das Reich auch als „Führerstaat" ausgestaltet. Der Führer und Reichskanzler vertritt als Staatsoberhaupt das Reich nach außen. Er ist Oberster Befehlshaber über die gesamte Wehrmacht. Er ernennt und entläßt die Reichsminister, Reichsstatthalter und Reichs- und Landesbeamten.

Nach des Führers Willen ist das Reich aber auch ein völkischer Staat. Darum muß jeder volksfremde Einfluß auf das Leben des Volkes und Staates ausgeschaltet werden. Die Lösung der Judenfrage war daher ein Gebot der Selbsterhaltung. So kommt die Rassengesetzgebung zustande, die durch die „Nürnberger Gesetze" auf dem Nürnberger Parteitag 1935 ihre Krönung fand. Danach kann deutscher Staatsbürger nur sein, wer deutschen und artverwandten Blutes ist. Aus den Reihen der Beamten, Soldaten, Rechtsanwälte, Ärzte und Schriftleiter wurden durch den „Arierparagraphen" Juden und jüdische Mischlinge ausgemerzt.

Die innere Befriedung, die einheitliche Ausrichtung und der staatliche Zusammenschluß des Reiches waren die notwendigen Voraussetzungen für eine erfolgreiche Außenpolitik im Kampf gegen die Schmach von Versailles. Der erste entscheidende Schritt des Führers auf diesem Wege war die Erringung der deutschen Wehrfreiheit. Am Heldengedenktag, am 16. März 1935, verkündete er die Wiedereinführung der Allgemeinen Wehrpflicht. Es war die Geburtsstunde der neuen Wehrmacht im nationalsozialistischen Volksstaat. Ein Jahr später, am 7. März 1936, gab der Führer den Befehl zum Einrücken deutscher Truppen in die entmilitarisierte Zone an Rhein und Ruhr. Das war ein ungeheures Wagnis, denn unsere Aufrüstung stand erst in den Anfängen. Dennoch ließen es die Feinde nur bei papierenen Einsprüchen bewenden.

Aber selbst jetzt waren wir noch nicht völlig Herren im eigenen Hause. Noch waren unsere großen Ströme und der Nord-Ostsee-Kanal, noch waren auch die Deutsche Reichsbank und Reichsbahn ausländischer Aufsicht unterstellt. Diesem entehrenden Zustand machte der Führer aus eigener Machtvollkommenheit ein Ende (am 14. November 1936 und am 31. Januar 1937).

Schon vor der Erringung der Wehrfreiheit war die Heimholung des Saarlandes ins Reich gelungen. In der Abstimmung am 13. Januar 1935 entschieden sich die Saarländer mit überwältigender Mehrheit für die Wiedervereinigung mit dem Mutterlande. In glänzender Weise hatte das Reich Adolf Hitlers seine Werbekraft auf die Deutschen jenseits der Grenzen erwiesen.

Schwere innere Kämpfe führten im März 1938 zum Sturz des österreichischen Bundeskanzlers Schuschnigg. Der nationalsozialistische Innenminister Seyß-Inquart übernahm das Bundeskanzleramt. Er rief am 11. März die Hilfe der deutschen Regierung an. Der Führer zögerte keinen Augenblick. Er ließ sofort deutsche Truppen einrücken und begab sich selber am Morgen des 12. März in seine Heimat. Von Linz wurde am 13. März ein Gesetz erlassen, das die Wiedervereinigung Österreichs mit dem Deutschen Reich bestimmte. Das Ereignis vollzog sich so schnell, daß die feindlichen Mächte gar keine Zeit fanden, sich einzumischen.

Unter dem Eindruck dieses mitreißenden Geschehens wurde das Verlangen der Sudetendeutschen nach Befreiung vom tschechischen Joch immer größer. Gegen den starken Widerstand Englands und Frankreichs gelang es dem Führer mit Unterstützung Mussolinis in der Münchener Zusammenkunft am 29. September 1938, den Anschluß der Sudetendeutschen an das Mutterland durchzusetzen.

Der Zersetzungsprozeß, in dem sich die Tschecho-Slowakei befand, war damit noch nicht beendet. Die Deutschen, die wie große Inseln im fremden Staat lebten, wurden so von den Tschechen drangsaliert, daß sie sich hilfesuchend an das Reich wenden mußten. Die Slowaken sagten sich von den Tschechen los und baten ebenfalls um den Schutz des Deutschen Reiches. Der tschechische Staat drohte auseinanderzufallen. Da kam am 15. März 1939 der tschechische Staatspräsident Dr. Hacha nach Berlin und legte das Schicksal seines Landes vertrauensvoll in die Hände des Führers. Dieser nahm das Angebot an und gliederte das Land als „Protektorat Böhmen und Mähren" ins Deutsche Reich ein. So hatte Adolf Hitler ohne einen Schwertstreich den größten Unruheherd im Herzen Europas beseitigt.

Im gleichen Monat gelang es auch, das Memelland in das Reich heimzuholen. Litauen hatte das Land während des Ruhreinbruchs der Franzosen mit Duldung unserer Feinde geraubt. Im März 1939 gab es das Memelland freiwillig an Deutschland zurück.

Durch das Versailler Schanddiktat war im Osten unseres Reiches ein Polen auferstanden, das auf Kosten Deutschlands stark aufgebläht worden war. Fast die gesamte Provinz Posen und wertvolle Teile Oberschlesiens waren vom Reich losgerissen worden. Ostpreußen lag wie eine Insel mitten im fremden Land. Diese unsinnige Grenzziehung im Osten bedeutete für uns eine dauernde Bedrohung unserer Sicherheit. Trotz der Unterdrückung, der unsere Stammesbrüder dauernd ausgesetzt waren, versuchte der Führer eine friedliche Lösung der Ostfrage. Am 26. Januar 1934 schloß er mit dem polnischen Staatsführer Pilsudski einen zehnjährigen Nichtangriffspakt. Nach dem Tode dieses großen Marschalls flammte die Vernichtungspolitik der Polen von neuem auf. Sie wurde von England und Frankreich weitgehend unterstützt. Trotzdem versuchte der Führer nochmals eine friedliche Lösung. Polen aber weigerte sich, die urdeutsche Stadt Danzig dem Reiche zurückzugeben und eine Landverbindung durch Eisenbahn und

Autostraße zwischen dem Reich und Ostpreußen zuzugestehen. So sah sich der Führer gezwungen, den deutsch-polnischen Vertrag von 1934 zu kündigen. Als die Polen im August 1939 vor Verletzungen der deutschen Grenze und schließlich vor der allgemeinen Mobilmachung nicht zurückschreckten, gab es für Deutschland nur noch eine Antwort auf diese Herausforderung, nämlich die Entscheidung der Waffen.

Die junge deutsche Wehrmacht zerschlug den polnischen Staat mit ungeahnter Schnelligkeit. Danzig und alle ehemals deutschen Gebiete im Osten kehrten heim ins Reich. Deutschland hatte die Herrschaft über den polnischen Raum bis an den Bug gewonnen. Dort grenzte es unmittelbar an die Sowjetunion, mit der wir am 27. September 1939 einen Vertrag abgeschlossen hatten. Das deutsche Heer war jetzt frei für den Entscheidungskampf im Westen.

Frankreich und England hatten geglaubt, durch den Schandvertrag von Versailles Deutschland ewig knechten zu können. Frankreich wollte seine Grenze an den Rhein legen. Durch maßlose Tributforderungen sollte Deutschland wirtschaftlich zugrunde gerichtet werden. Frankreich besaß aber gar nicht mehr die Lebens- und Volkskraft und auch nicht das moralische Recht, seine Vormachtstellung in Europa aufrechtzuerhalten. Das zeigte sich, als der Führer die Wehrhoheit aufrichtete und die Rheinlande besetzte. Frankreich mußte zusehen, wie das gewaltige Werk des Westwalls geschaffen wurde, das jede Angriffsmöglichkeit vom Westen her zunichte machte. Trotz der zusehends wachsenden Macht Deutschlands streckte der Führer Frankreich wiederholt die Versöhnungshand entgegen. Frankreich stieß sie jedesmal zurück und begab sich in immer stärkere Abhängigkeit von England, das seine Einkreisungspolitik gegen Deutschland betrieb. Auch England gegenüber zeigte der Führer seinen Verständigungswillen. Er ging so weit, England eine Beschränkung der deutschen Kriegsflotte im Verhältnis 1 : 3 zuzugestehen (1935). Aber dieses verharrte bei seiner Einstellung, verschärfte den Verleumdungsfeldzug, vermehrte seine Rüstungen und mischte sich ständig in deutsche Angelegenheiten im Ost- und Südostraum Europas ein. Sein Garantieversprechen an Polen war dann schließlich der äußere Anlaß zur Kriegserklärung gegen Deutschland. Die wahre Ursache aber liegt in der alten Politik Englands, die kein Deutschland als Weltmacht aufkommen lassen will.

Nach der Niederringung Polens in nur achtzehn Tagen zog England die nordischen Staaten in seinen Einkreisungsplan gegen Deutschland. In einem kühnen Unternehmen kam ihm der Führer zuvor und besetzte im April 1940 in vorbildlicher Zusammenarbeit aller Wehrmachtteile Dänemark und Norwegen. Dann wurde innerhalb von sechs Wochen Frankreich niedergerungen und England vom europäischen Festland vertrieben. Elsaß-Lothringen wurde vom französischen Joch befreit. Luxemburg, altes deutsches Land, kehrte heim ins Reich. Holland und Belgien mußten ihren Pakt mit den Westmächten mit der Kapitulation ihrer Armeen bezahlen. Am 18. Mai 1940 schon ordnete der Führer die Rückgliederung der ehe-

maligen deutschen Gebiete Eupen und Malmedy an, die seit dem Diktat von Versailles unter belgischer Herrschaft gestanden hatten.

Englands Plan, den Balkan als Aufmarschgebiet gegen Deutschland zu benutzen, wurde vom Führer durch raschen Zugriff zunichte gemacht. Durch unsere Erfolge auf dem südöstlichen Kriegsschauplatz konnte die Südsteiermark ins Reich heimkehren.

In der Sowjetunion fand England einen willigen Verbündeten. Dieser hat, obwohl er mit Deutschland einen Vertrag abgeschlossen hatte, versucht, die nationalsozialistische Weltanschauung in Deutschland zu untergraben und glaubte mit Forderungen an uns herantreten zu können, deren Erfüllung sich mit unserer Ehre nicht vereinbaren ließen. Da auch wiederholt Grenzverletzungen von seiten der Bolschewisten vorkamen, sah sich der Führer gezwungen, gegen die Sowjetunion die Entscheidung mit der Waffe zu erkämpfen.

Die Vernichtung der bolschewistischen Gefahr und der plutokratischen Ausbeutung wird nicht nur Deutschlands Zukunft sichern, sondern allen Völkern des europäischen Kontinents die Möglichkeit einer friedlichen, harmonischen und fruchtbaren Zusammenarbeit sowohl auf politischem als auch auf wirtschaftlichem und kulturellem Gebiet schaffen.

Die Einkreisung Deutschlands

Durch Adolf Hitlers geniale Führung war es den Westmächten nicht gelungen, das Reich von allen Seiten einzukreisen und durch einen Krieg an mehreren Fronten zu erdrücken. Sie meinten damit ein Verfahren wiederholen zu können, das ihnen schon einmal gelungen war. Der Weltkrieg gegen das deutsche Volk (1914—1918) mit dem geschlossenen Ring von Feinden und der würgenden Rohstoff- und Hungerblockade und schließlich das schmachvolle Ende von Versailles waren das Ergebnis dieser Einkreisungspolitik. Sie gab einem schicksalhaften Zeitraum unserer deutschen Geschichte das Gepräge, dem wir in rückschauender Betrachtung uns zuwenden wollen.

Fürst Bismarck, der Eiserne Kanzler, hatte die Gefahren klar erkannt, die seiner Reichsschöpfung von außen drohten: die Schwäche der geographischen Mittellage Deutschlands mit zwei offenen Flanken im Westen und Osten und die Bedrohung durch einen Zweifrontenkrieg, die Vergeltungssucht Frankreichs für die Niederlage von 1870/71 und die Mißgunst der Großmächte. Zum Schutze des Reiches und zur Befriedung Europas hatte er den Dreibund zwischen Deutschland, Österreich-Ungarn und Italien gegründet und einen Rückversicherungsvertrag mit Rußland abgeschlossen.

Am 20. März 1890 entließ der junge Kaiser Wilhelm II. den alten Kanzler. Die neuen Männer in der Reichsregierung steuerten ihren neuen Kurs. Die Macht des Reiches schien schneller als früher zu wachsen. Das trat vornehmlich in einem gewaltigen Aufschwung des Wirtschaftslebens

zutage. Die Bevölkerung wuchs von 41 Millionen im Jahre 1871 auf 68 Millionen im Jahre 1910. Die Landwirtschaft steigerte ihre Erträge durch gründliche Bodenausnutzung, durch vermehrte Anwendung der Kunstdüngung und der landwirtschaftlichen Maschinen. Die Kohlenförderung wuchs von 1871 bis 1913 von 26,3 auf 190,1 Millionen Tonnen. Die Stahlerzeugung stieg in der gleichen Zeit bis auf 19 Millionen Tonnen an und erreichte fast den dreifachen Wert der englischen (7,9 Millionen Tonnen). Die Webwarenerzeugung steigerte die Ausfuhr um das Sechsfache. Unsere Handelsflotte wuchs von 1,6 auf 5 Millionen Tonnen, auf fast 50% der englischen, an und wurde die zweitgrößte der Welt. Der Wert des deutschen Außenhandels vervierfachte sich von $4^1/_2$ auf $16^1/_2$ Milliarden Mark. Gewiß zeigen die angeführten Beispiele und Zahlen ein stolzes Bild deutscher Leistung. Dennoch kündeten sich unter der Oberfläche schon Anzeichen des Verfalls an.

Weil der industrielle Flügel unserer Wirtschaft allzu schnell und allzusehr verstärkt wurde, mußte unser Volk zu einem immer größeren Teil aus fremdem Boden leben. Deutschland führte vor dem Weltkrieg jährlich für 3 Milliarden Mark Nahrungsmittel aus dem Auslande ein, aber seiner Landwirtschaft versagte es ausreichenden Zollschutz gegen die billigen überseeischen Erzeugnisse. So geschah es, daß der deutsche Bauer in wachsende Verschuldung und in die Zinsknechtschaft des vielfach jüdischen Kapitals geriet und daß damit die Landwirtschaft ihre Aufgabe, Ernährungsgrundlage des Volkes zu sein, immer weniger erfüllen konnte. So wurden wir allmählich ein „Volk ohne Raum".

An den Fundamenten des nach außen so prächtigen Reichsbaues nagten unermüdlich die Mächte der Zerstörung.

Der Kapitalismus entfaltete sich üppig. Sein sichtbarstes Kennzeichen, die Großunternehmungen, die mehr als 1000 Arbeiter beschäftigten, schossen wie Pilze aus der Erde. Auch der Grund und Boden wurde immer mehr wie eine bewegliche Ware behandelt und damit die Verbindung von „Blut und Boden", auf der das völkische Wirtschaftsleben ruht, nach und nach gelöst.

Als die eigentliche treibende Kraft und als der größte Nutznießer des internationalen Kapitalismus muß das Weltjudentum in engem Zusammenhang mit der Weltfreimaurerei angesprochen werden. Ihr Ziel war die Weltherrschaft Judas, die Voraussetzung dazu die Vernichtung alles völkischen Eigenlebens. Der Haß des Judentums richtete sich vornehmlich gegen das Deutsche Reich und die gesunden, staatserhaltenden Kräfte seines Volkstums, gegen Soldaten-, Beamten- und Bauerntum. Der Jude hatte seinen unheilvollen wirtschaftlichen Einfluß in Deutschland als Händler begonnen und nahezu das gesamte Bekleidungsgewerbe, den Lebensmittel-, Vieh- und Getreidehandel unter seine Herrschaft gebracht. Am schlimmsten aber war es, daß es ihm gelang, die deutsche Industrie vom Beginn ihres Aufblühens an in seine Abhängigkeit zu bringen und das Leihkapital und das Bankwesen völlig zu beherrschen.

Der Jude brach auch immer stärker in die geistigen Berufe ein und maßte sich schließlich an, den geistigen Besitz des deutschen Volkes zu verwalten. Auch die rassische Verjudung des deutschen Volkes nahm wachsend zu und fügte zu den Zerstörungen auf politischem und sozialem Gebiet den Beginn der rassischen Verderbnis.

Zu diesen inneren Bedrohungen des Reiches kamen die außenpolitischen Gefahren dazu. Bismarcks Ziel war es gewesen, den Bestand des Reiches durch ein wohldurchdachtes Bündnissystem zu sichern. Vor allem lag ihm eine Verständigung mit Rußland am Herzen. Der Nachfolger Bismarcks, Caprivi, erneuerte nicht den Rückversicherungsvertrag mit Rußland, der 1890 ablief. Dieses sah sich nach einem anderen Bundesgenossen um und schloß 1892 mit Frankreich einen Vertrag. Von da ab mußte Deutschland mit einem Zweifrontenkrieg rechnen.

Der Versuch, in ein erträgliches Verhältnis mit England zu kommen, scheiterte. Die Engländer fühlten sich durch Deutschlands machtvolle wirtschaftliche Entwicklung und durch das Anwachsen der deutschen Kriegsflotte bedroht. Auch Deutschlands freundschaftliches Verhältnis zur Türkei und der Bau der Bagdadbahn, die bis in das englische Ölzentrum führte, waren England ein Dorn im Auge. Daher betrieb es nun jene berüchtigte Einkreisungspolitik gegen das Reich, die man als das ureigenste Werk Eduards VII. (1901—1910) bezeichnen kann. 1904 schloß England mit Frankreich die „Entente cordiale" ab.

Frankreichs Bemühungen gelang es schließlich, Rußland und England zusammenzubringen, so daß 1907 die „Triple Entente" aus der Taufe gehoben wurde. Jetzt war die Einkreisung Deutschlands im wesentlichen beendet. Deutschland war vereinsamt und konnte im Ernstfall nur auf Österreich-Ungarn rechnen. Denn auch Italien, der Verbündete Deutschlands, neigte mehr und mehr nach der anderen Seite, da es sich in seiner damaligen Lage auf keinen Fall in einen Krieg mit England einlassen konnte und zudem Ansprüche auf die von Österreich-Ungarn beherrschten Gebiete an der Adria machte.

Die politische Einkreisung Deutschlands wurde noch verstärkt durch einen Verleumdungsfeldzug der gegnerischen Presse von ungeahntem Ausmaß. Jede Äußerung einer maßgebenden Persönlichkeit in Deutschland wurde aufgebauscht oder entstellt in die Welt hinausposaunt und Deutschland als der Friedensstörer in Europa hingestellt. Zur politischen Einkreisung trat die moralische Einkreisung. Deutschland beachtete damals die Waffe der Propaganda nicht. Es verfügte auch nicht über die nötigen Mittel, da die Kabel alle in englischer Hand waren. So war es denn kein Wunder, daß es der Gegenseite gelang, während des Weltkrieges 1600 Millionen Menschen gegen uns auf den Plan zu rufen.

Gewitterschwangere Wolken bedeckten den politischen Himmel Europas. Jedermann ahnte die hereinbrechende Katastrophe. Wie ein Alpdruck lastete Ungewißheit über die Zukunft auf jedem Herzen. Da trat ein Er-

eignis ein, das mit einem Schlage die Lage enthüllte: Am 28. Juni 1914 wurde der österreichische Thronfolger in Sarajewo ermordet. Damit war der Weltkrieg entfesselt.

Die deutschen Einigungskriege und die Aufrichtung des Bismarckschen Reiches

Napoleon zerschlug im Jahre 1806 das alte Reich der Deutschen, das fast 1000 Jahre lang bestanden hatte. Zwar gelang es in den anschließenden Befreiungskriegen, das französische Joch wieder abzuschütteln. Aber der brennende Wunsch der Deutschen, ein neues, herrliches Reich zu schaffen, blieb unerfüllt. Vor allem war man sich nicht einig, ob Österreich, die führende Macht im alten Reiche, in das neue Reich mit einbezogen werden sollte. Die beiden Großmächte des deutschen Lebensraumes, Preußen und Österreich, stritten um die Vorherrschaft. Daneben war eine große Anzahl von Mittel- und Kleinstaaten vorhanden, die ihren eigenen Interessen nachgingen.

Im Rahmen dieser unerfreulichen Lage begann Bismarck um die Mitte des vorigen Jahrhunderts seine politische Laufbahn. Zunächst setzte er als preußischer Ministerpräsident im Parlament die erforderlichen Heeresverstärkungen durch. Durch ein freundschaftliches Verhältnis zu Rußland sicherte er sich im Osten freie Hand. Nun bereinigte er die Schleswig-Holsteinische Frage. Die beiden Herzogtümer waren in Personalunion mit Dänemark verbunden. Wohl war der König von Dänemark zugleich Herzog von Schleswig und Holstein, aber in einem Vertrag war ausdrücklich bestimmt, daß beide Herzogtümer niemals dem dänischen Staate eingegliedert werden sollten. Im Vertrauen auf Englands Hilfe verleibte 1863 der dänische König dennoch Schleswig seinem Lande ein. Bismarck erhob dagegen Einspruch, Österreich schloß sich an. Gemeinsam gingen beide Länder 1864 gegen Dänemark vor. Der Krieg nahm einen raschen Verlauf. Mit der Erstürmung der Düppeler Schanzen und dem Übergang nach Alsen war er im wesentlichen beendet. Dänemark, von England im Stich gelassen, mußte im Frieden zu Wien die beiden Herzogtümer an Preußen und Österreich abtreten, die zunächst beide gemeinsam die Herzogtümer verwalteten.

Durch den Vertrag von Gastein übernahm Preußen die Verwaltung von Schleswig, Österreich die von Holstein. Aber auch diese Entwicklung war für Bismarck nur eine Zwischenstufe. Er wollte beide Herzogtümer Preußen einverleiben. Zugleich erkannte er, daß diese Streitfrage die unvermeidbare Auseinandersetzung zwischen den beiden Großmächten Preußen und Österreich auslösen würde.

Als daher Bismarck das Herzogtum Holstein Preußen eingliederte, ließ Österreich im Bundesparlament in Frankfurt a. M. den Bundeskrieg an Preußen erklären. Auf Seiten Österreichs standen die süddeutschen Staaten, ferner Sachsen und Hannover.

Doch dieser Krieg verlief fast ebenso schnell wie der deutsch-dänische. Bei Königgrätz brachte der Generalstabschef Moltke am 3. Juli 1866 dem Feinde die entscheidende Niederlage bei. Mit dieser Entscheidung begnügte sich Bismarck und drängte auf einen schnellen Friedensschluß. Er wollte Österreich nicht zu sehr demütigen, vor allem aber gegen die drohende Haltung Frankreichs gewappnet sein. Als Erfolg konnte Preußen die Einverleibung von Schleswig-Holstein, Hannover, Kurhessen, Hessen-Nassau und Frankfurt a. M. buchen. Damit war die Brücke zu den preußischen Provinzen am Rhein geschlagen und Preußen die überragende Vormacht im norddeutschen Raum geworden. Die wichtigste Errungenschaft aber war die endgültige Lösung der deutschen Frage zugunsten Preußens, Österreich war aus Deutschland hinausgedrängt.

Bismarck nutzte den Sieg restlos aus, indem er sofort an die Neuordnung innerhalb Norddeutschlands ging. Es gelang ihm, sämtliche norddeutschen Staaten unter Preußens Führung zum Norddeutschen Bund zusammenzufassen. An der Spitze stand der König von Preußen, Kanzler des Bundes war Bismarck. Mit den süddeutschen Staaten schloß er ein Schutz- und Trutzbündnis ab, durch das die süddeutschen Staaten im Kriegsfalle ihre Truppen dem Oberbefehl des preußischen Königs unterstellten.

Frankreich sah diesen Einigungsversuchen Preußens mit größtem Mißtrauen zu. Als Spanien einem Prinzen von Hohenzollern-Sigmaringen seine Krone anbot, fürchtete Frankreich, von Preußen in die Zange genommen zu werden. Der französische Kaiser forderte darauf von Preußens König ein bindendes Versprechen, daß er nie erlauben werde, daß ein Mitglied des Hauses Hohenzollern spanischer König werde. König Wilhelm wies diese Zumutung empört zurück. Frankreich erklärte darauf im Juli 1870 den Krieg. Jetzt zeigten sich die Früchte der Bismarckschen Politik im vollen Umfange. Der Krieg mit dem alten Erbfeind wurde überall als deutsche Sache empfunden. Die süddeutschen Staaten zogen gemeinsam mit Preußen gegen Frankreich. Zum erstenmal seit undenklichen Zeiten stand ein einiges deutsches Volk geschlossen da.

Durch den überraschend schnellen Aufmarsch der deutschen Heere wurde Napoleons III. ursprünglicher Plan, nach Süddeutschland vorzustoßen und so die süddeutschen Staaten von Norddeutschland zu trennen, zunichte gemacht. In einer Reihe siegreicher Schlachten wurden die Franzosen geworfen und auf ihre Festungen zurückgedrängt. Eine Armee, die zum Entsatz der Festung Metz heranrückte, wurde bei Sedan eingeschlossen und mußte sich mit dem Kaiser ergeben. Mit dem Fall von Paris war der Krieg im wesentlichen beendet. Der Frankfurter Friede setzte den Schlußstrich unter die gewaltige Abrechnung zwischen Deutschland und Frankreich. Elsaß-Lothringen kehrte heim ins Reich. Frankreich mußte eine Kriegsentschädigung von 5 Milliarden Franken (= 4 Milliarden Reichsmark) bezahlen.

Noch während der Belagerung von Paris wurde am 18. Januar 1871 der preußische König im Schloß von Versailles zum deutschen Kaiser ausgerufen. Das kleindeutsche Reich, das Bismarck-Reich, war entstanden.

Für Bismarck begann mit der Schöpfung des zweiten Reiches ein Zeitraum angestrengter Arbeit. Er mußte die Stellung des Reiches nach außen stärken und im Innern ausbauen. Solange Frankreich allein stand, wagte es keinen Angriff auf Deutschland. Bismarcks Politik zielte darauf, diese isolierte Stellung Frankreichs zu erhalten und gleichzeitig die eigene Stellung durch Bündnisse zu stärken. Die Schonung, die er Österreich nach dem Kriege hatte zuteil werden lassen, trug jetzt ihre Früchte. Österreich näherte sich Deutschland. Im Jahre 1872 trafen sich die Herrscher von Deutschland, Österreich und Rußland und schlossen das Dreikaiserbündnis ab. Frankreich erhielt freie Hand in Nordafrika und sollte dadurch von seinem Streben nach dem Rhein abgelenkt werden.

Doch im Laufe der folgenden Jahre spielten sich im Osten Ereignisse ab, die das freundschaftliche Verhältnis Rußlands zu Deutschland störten. Die Russen wollten den Zugang zum Mittelländischen Meer in ihre Hand bekommen. Als sie im Begriff waren, sich Konstantinopels zu bemächtigen, schritten England, Frankreich und Österreich ein und forderten eine Konferenz zur Beilegung des Streitfalles. Unter Bismarcks Leitung wurde 1878 auf der Berliner Konferenz erreicht, daß Rußland auf seine Ansprüche an die Türkei verzichten mußte. Rußland war darüber verstimmt und schob Bismarck die Schuld am Mißlingen seiner Pläne zu. Als die Haltung Rußlands drohend wurde, schloß Bismarck 1879 mit Österreich-Ungarn den Zweibund. Damit war der alte deutsch-österreichische Gegensatz beseitigt. Durch den Beitritt Italiens, das sich gegen Frankreichs Ausdehnung in Nordafrika sichern wollte, entstand 1882 ein Dreibund.

Trotz dieser Bündnisse hatte Bismarck niemals die Brücken nach Rußland abgebrochen. Im Jahre 1881 wurde das alte Dreikaiserbündnis erneuert und 1884 bestätigt. Aber der Gegensatz zwischen Rußland und Österreich war so groß, daß 1886 das Bündnis nicht noch einmal zustande kam. Bismarck schloß, um einen Zweifrontenkrieg auf jeden Fall zu verhindern, 1887 mit Rußland — ohne Österreichs Wissen — einen Rückversicherungsvertrag auf drei Jahre. Beide Mächte sicherten sich Neutralität zu, falls Deutschland von Frankreich bzw. Rußland von Österreich angegriffen werden sollte.

Nach dem Deutsch-Französischen Krieg hatten die Franzosen begonnen, ihr afrikanisches Kolonialreich mächtig auszubauen. Auch England schuf sich ein gewaltiges Weltreich. Bismarck war gegen den Erwerb von Kolonien. Er wollte das Reich erst zu einem festen Block zusammenschweißen, ehe er ihm so große Aufgaben zumutete, wie sie der Erwerb von Kolonien mit sich bringen mußte. Auch fürchtete Bismarck, durch eine koloniale Tätigkeit in einen Gegensatz zu England zu geraten. Diese Belastungsprobe wollte er dem jungen Reich ersparen. Im Volke jedoch wurde der Kolonialgedanke lebhaft erörtert. Diesen Bestrebungen konnte

sich Bismarck auf die Dauer nicht verschließen. Als daher tatkräftige deutsche Kaufleute (Lüderitz, Peters, Nachtigal, Woermann) in Afrika Niederlassungen gründeten, gab Bismarck endlich nach und stellte die Erwerbungen unter den Schutz des Reiches. In den Jahren 1884/85 erwarb das Reich Deutsch-Südwestafrika, Deutsch-Ostafrika, Kamerun und Togo. Dann folgten die Erwerbungen in der Südsee. 1897 pachteten wir noch Kiautschou auf 99 Jahre. Damit hatte das Reich die bisher streng eingehaltenen Grenzen der Festlandspolitik verlassen und sich hinausbegeben auf das Gebiet der Weltpolitik.

Neben dem Kampf um die außenpolitische Stellung Deutschlands ging gleichlaufend der Kampf um die innere Einigung des Volkes. Dieses war in Parteien und Klassen aufgeteilt, die sich gegenseitig befehdeten und auch versuchten, gegen den Staat anzukämpfen. Der Sieg des evangelischen Preußens über das katholische Österreich hatte die Gründung einer katholischen Partei, des Zentrums, zur Folge gehabt. Ihre Haltung wurde nicht von den Bedürfnissen des deutschen Volkes bestimmt, sondern von einer außerdeutschen Macht, dem Papsttum. Die Partei scheute auch nicht davor zurück, die Elsässer, Welfen und Polen, also alle diejenigen Kräfte, die mit der Bismarckschen Reichsgründung unzufrieden waren, offen gegen das Reich zu unterstützen. Bismarck nahm den Kampf gegen die Machenschaften der römischen Kirche auf. Im sogenannten „Kanzelparagraphen" verbot er die Hetze von der Kanzel herab. 1875 führte er die Zivilehe ein und wies die Jesuiten aus Deutschland aus. Die Schulaufsicht kam in staatliche Hände. Die Unabhängigkeit des Staates von Rom war gesichert.

Schwieriger war der Kampf, den Bismarck gegen die zweite überstaatliche Macht, gegen die Sozialdemokratie, zu führen hatte. Nach dem Kriege 1870/71 blühte die Wirtschaft auf. Die Industrie nahm zu, und die Zahl der Arbeiter stieg in den Großstädten gewaltig an. Diese Arbeitermassen („Proletarier"), die meist nur bescheidenstes Eigentum besaßen, hatten ein williges Ohr für die Lehre internationaler jüdischer Hetzer. Schlagworte wie „Abschaffung des Privateigentums" und „Verstaatlichung der Produktionsmittel" klangen so verführerisch, daß sie von den Massen der aufschießenden Großstädte mit Beifall aufgenommen wurden. Die Massen der Arbeiter strömten zu den jüdischen Hetzern, die in der soeben gegründeten Sozialdemokratischen Partei eine gute Gelegenheit sahen, die staatliche Ordnung zu bekämpfen und die Massen der arbeitenden Bevölkerung ihren dunklen Plänen einer Weltrevolution dienstbar zu machen.

Lange beobachtete Bismarck das Treiben der Sozialdemokratie. Als aber im Jahre 1878 unter dem Einfluß jüdischer Hetzreden zwei Attentate auf Kaiser Wilhelm I. ausgeführt wurden, benutzte Bismarck diese Gelegenheit, um gegen die Wühlarbeit der Sozialdemokraten einzuschreiten. Durch das sogenannte Sozialistengesetz wurde die Partei aufgelöst, ihre Zeitungen verboten. Bismarck wollte nun durch eine entschlossene Sozialgesetz-

gebung die Arbeitermassen für den Staat gewinnen. 1883 erschien das Krankenversicherungsgesetz, das dem Arbeiter freie ärztliche Behandlung und Versorgung einräumte und der Familie eine Entschädigung für den Lohnausfall gab. Durch das Unfallgesetz vom Juli 1884 wurden Maßnahmen zur Verhütung von Unfällen in den Betrieben angeordnet und Unterstützungen bei Unfallschäden gewährt. Einen sorgenfreien Lebensabend sicherte dem Arbeiter das Invaliden- und Altersversicherungsgesetz, das 1889 veröffentlicht wurde.

Sein Ziel jedoch, den Arbeiter durch diese in der Welt einzig dastehende Fürsorge mit dem Staate auszusöhnen, hat Bismarck nicht erreicht. Die Unzufriedenheit wuchs und wurde von gewissenlosen internationalen Hetzern emsig weiter geschürt.

Trotzdem kann zusammenfassend gesagt werden, daß es Bismarck gelungen ist, gegen alle Widerstände mit seiner Reichsgründung ein Werk zu schaffen, das ihn für immer in die Reihen der Größten unseres Volkes stellt.

1888 starb Kaiser Wilhelm I., und nach kurzer Regierungszeit Friedrichs III. bestieg dessen Sohn Wilhelm II. den deutschen Kaiserthron. Der junge Kaiser war nicht bereit, durch die überragende Stellung Bismarcks sich seine eigenen politischen Pläne beengen zu lassen. Er erstrebte Weltpolitik um jeden Preis. Vor allem wollte er nicht hinter England zurückstehen. Diese Haltung führte zu einem unüberbrückbaren Gegensatz zu dem alten Kanzler. Jung und alt verstanden sich nicht. Einer mußte nachgeben — und Bismarck ging (1890). Er verbrachte seinen Lebensabend in stiller Zurückgezogenheit auf seinem Landsitz Friedrichsruh im Sachsenwald bei Hamburg. Am 30. Juli 1898 schloß Bismarck dort die Augen für immer. Nach seinem Willen fand er seine Ruhe unter den Eichen des Sachsenwaldes. Im Volk lebt Bismarck weiter als einer der größten deutschen Staatsmänner, als der Schmied des Reiches.

Von der Französischen Revolution bis zum Wiener Kongreß

Die Französische Revolution vom Jahre 1789 kam nicht überraschend. Schon um die Mitte des Jahrhunderts waren Stimmen laut geworden, die eine Änderung der bestehenden Verhältnisse forderten. Der übersteigerte Absolutismus des französischen Königtums, der in den Worten Ludwigs XIV. „Der Staat bin ich" seinen augenfälligsten Ausdruck fand, war allmählich unerträglich geworden. Die Staatsschulden waren infolge der glänzenden Hofhaltung und der zahlreichen auswärtigen Kriege ins Riesenhafte gewachsen und verursachten einen gewaltigen Steuerdruck, der hauptsächlich auf den ärmeren Bevölkerungsschichten lastete, während Adel und Geistlichkeit ganz befreit oder doch wesentlich begünstigt waren. Das Volk kannte nur Pflichten, von dem Recht der Mitarbeit am Staat war es vollkommen ausgeschlossen.

Um der Stimmung des Volkes Rechnung zu tragen und die Mißstände zu beseitigen, gab der König seine Zustimmung zur Einberufung der Reichsstände. Diese gerieten untereinander in Streit. Schließlich erklärte sich der Dritte Stand, die Bürger, als Nationalversammlung für allein zuständig. Als der König sah, daß die Gewalt seinen Händen entglitt, zog er Truppen zusammen, um die Ruhe und Ordnung aufrechtzuerhalten. Darüber empörte sich das Volk dermaßen, daß es zu den Waffen griff und die Bastille, das Staatsgefängnis, in dem die Aufrührer zum Schweigen gebracht worden waren, stürmte (14. Juli 1789). Jetzt hatte das Volk die Gewalt in den Händen, und die Nationalversammlung konnte ihre Arbeiten unbehelligt fortsetzen. Die ersten Beschlüsse galten der Beseitigung aller Vorrechte. Die Menschenrechte, die in den Worten „Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit" gipfelten, wurden verkündet. Mit der Einziehung der Kirchengüter, der Aufhebung der Klöster und Orden, der Verstaatlichung der Schulen und der Einführung der Zivilehe waren die wesentlichsten Reformen durchgeführt. Die weiteren Arbeiten galten einer neuen Verfassung. Frankreich wurde eine konstitutionelle Monarchie.

Der König war mit der neuen Verfassung, durch die seine bisherigen Rechte stark beschnitten wurden, nicht zufrieden und suchte beim Ausland Hilfe. Seine Rufe fanden bei Österreich und Preußen ein williges Ohr, da beide Mächte ein Übergreifen der Revolution auf ihr Gebiet befürchteten. Auf die Kunde vom Vormarsch der Verbündeten wurde in Frankreich die allgemeine Volksbewaffnung durchgeführt, nachdem zuvor die Guillotine unter den Feinden der Revolution aufgeräumt hatte. Preußen und Österreich nahmen es nicht ernst mit dem Krieg und überließen den französischen König seinem Schicksal. In Frankreich wurde schließlich die Monarchie abgeschafft und der König hingerichtet. Nun nahm die Revolution jene schrecklichen Formen an, die bei allen zivilisierten Völkern Schaudern und Entsetzen erregten. Tausende und aber Tausende verloren ihren Kopf unter der Guillotine. Gleichzeitig wurde der nationale Widerstand organisiert und der Kampf gegen die Feinde Frankreichs wieder aufgenommen. Belgien und das linke Rheinufer wurden erobert und mit der neuen Ordnung nach Pariser Muster „beglückt". Im Jahre 1794 übernahm ein fünfköpfiges Direktorium die Regierung.

Preußen löste das Bündnis mit Rußland, um im Osten freie Hand zu haben und schloß mit Frankreich 1795 den Frieden zu Basel, in dem es insgeheim in die Abtretung des linken Rheinufers einwilligte. Der Krieg Frankreichs gegen Österreich aber ging an der Donau und am Po weiter. Der jugendliche General Bonaparte drang siegreich in das Herz der Habsburger Monarchie vor. Österreich blieb nichts anderes übrig, als im Frieden zu Campo Formio (1797) die Lombardei und die Niederlande an Frankreich abzutreten.

Auf dem Festlande hatte Frankreich nichts mehr zu befürchten. Aber jenseits des Kanals saß ein Gegner, mit dem es sich auseinandersetzen mußte: England. Dieses wurde zum erbittertsten Feind, weil sich Frank-

reich an der Rhein- und Scheldemündung festgesetzt hatte und auch von Oberitalien aus seine Mittelmeerstellung bedrohte. Napoleon faßte den kühnen Entschluß, England in seinen Kolonien anzugreifen. Er fuhr mit einem Heer nach Ägypten und schlug dort die in Englands Sold kämpfenden Mamelucken in der Schlacht bei den Pyramiden (1798). Da aber traf ihn ein gewaltiger Schlag. Der englische Admiral Nelson vernichtete die französische Flotte bei Abukir und machte so Napoleon die Rückkehr nach Frankreich unmöglich. Dieser unterwarf ganz Ägypten und kämpfte gegen die mit England verbündeten Türken. Als ihn die Kunde von einem neuen Bund zwischen Österreich, Rußland und England erreichte, ließ Napoleon kurz entschlossen sein Heer im Stich und kehrte in einem kleinen Fahrzeug bei Sturm und Wetter nach Frankreich zurück. Dort stürzte er das Direktorium und übernahm als Erster Konsul die diktatorische Gewalt (1799).

Mit einem schnell zusammengerafften Heer zog er gegen Österreich und schlug dieses entscheidend in der Schlacht bei Marengo (1800). Im Frieden zu Luneville (1801) wurde das linke Rheinufer endgültig an Frankreich abgetreten. Kaiser und Reich gaben uralten deutschen Volksboden preis, und ohnmächtig mußte das deutsche Volk zusehen, wie die Franzosen in Aachen, Köln, Mainz und Speyer einzogen.

Durch die Reformen, die Napoleon in Frankreich durchführte, vermochte er die Revolution zu überwinden, ohne auf ihre Errungenschaften zu verzichten. 1804 setzte er sich die Kaiserkrone aufs Haupt.

Österreich konnte die Demütigungen, die ihm Napoleon zugefügt hatte, und die gewaltigen Landverluste nicht verschmerzen. Mit Rußland schloß es ein Verteidigungsbündnis, dem später auch England beitrat. Napoleon rückte daraufhin mit einem starken Heer, in dessen Reihen auch die Truppen der süddeutschen Fürsten standen, in Eilmärschen gegen Wien vor und schlug das russisch-österreichische Heer in der Dreikaiserschlacht bei Austerlitz (1805). Im Frieden zu Preßburg wurde Österreich aus Italien verdrängt, Tirol mußte es an Bayern und kleinere Gebiete am Oberrhein und an der Donau an Baden und Württemberg abtreten. Frankreich war jetzt unumschränkter Herr von ganz Mitteleuropa. Zahlreiche Fürsten Süd- und Westdeutschlands sagten sich vom Reiche los und stellten sich im „Rheinbund“ unter Frankreichs Führung. Sie verpflichteten sich, Napoleon deutsche Truppen für künftige Kriege zur Verfügung zu stellen. So weit war es infolge des Sondergeistes der deutschen Fürsten gekommen, daß deutsche Truppen gegen deutsche Brüder kämpfen mußten. Daher legte Kaiser Franz II. im Jahre 1806 die deutsche Kaiserkrone nieder. Das heilige Römische Reich Deutscher Nation hatte aufgehört zu bestehen.

Preußen glaubte, durch Neutralität dem Krieg mit Frankreich fernbleiben zu können. Es war Napoleon in seinem Streben nach der gesamten Macht in Mitteleuropa aber genau so im Wege wie Österreich. Als Napoleon bei den Friedensbesprechungen mit England die Rückgabe Hannovers, das

Preußen erst erhalten hatte, anbot, entschloß sich Preußen zum Krieg, auf den es nicht im geringsten vorbereitet war. Nach der Niederlage seiner Vorhut bei Saalfeld wurde das preußische Heer bei Jena und Auerstedt (1806) vernichtend geschlagen. Die meisten Festungen öffneten Napoleon kampflos ihre Tore, so daß er ungehindert bis nach Berlin vorrücken konnte. Einige Kommandanten allerdings machten eine rühmliche Ausnahme. So hielt sich Kolberg unter der Führung von Gneisenau und Nettelbeck bis zum Ende des Krieges, und Blücher übergab Lübeck erst, als er „kein Brot und kein Pulver" mehr hatte. Aber all diese herrlichen Taten vermochten den Gang der Ereignisse nicht aufzuhalten. Im Frieden zu Tilsit (1807) verlor Preußen alles Land links der Elbe. Das preußische Heer durfte nicht mehr als 42000 Mann betragen. Außerdem hatte Preußen eine Kriegsentschädigung von 140 Millionen Francs zu zahlen. Französische Truppen blieben im Land, bis die Tribute entrichtet waren.

Von Berlin aus erließ Napoleon die Festlandssperre (Kontinentalsperre), um England in die Knie zu zwingen. Durch sie sollte der gesamte Handel Englands mit dem Festland unterbunden und die englische Industrie vernichtet werden.

Nur widerwillig hatten sich die europäischen Staaten dem fremden Diktator gebeugt und sich zur Teilnahme an der Festlandssperre zwingen lassen. In Spanien wurde ein wilder Kleinkrieg gegen die verhaßte Fremdherrschaft entfesselt. In Österreich begann man zu rüsten. Da erschien Napoleon mit einem Heer überraschend vor Wien. In der Schlacht von Aspern (1809) erlitt er seine erste Niederlage. Doch kurz darauf konnte er die Österreicher bei Wagram entscheidend schlagen. Im Frieden zu Schönbrunn mußte Österreich seinen gesamten Küstenbesitz an der Adria abtreten. Der Krieg war damit aber nicht beendet. So leisteten die Tiroler unter ihrem heldenmütigen Führer Andreas Hofer verzweifelten Widerstand. Auch in Norddeutschland machten sich Anzeichen einer wachsenden Unzufriedenheit mit der Napoleonischen Gewaltherrschaft bemerkbar. Da der König das Volk nicht zu einer befreienden Tat aufforderte, wagten es einzelne, so der Freikorpsführer Schill und der Prinz von Braunschweig, den Widerstand zu entfachen, aber vergebens.

Nach dem Frieden von Tilsit hatte der preußische König den Freiherrn vom Stein ins Ministerium berufen und ihn mit der Leitung der Regierung beauftragt. Dieser machte sich sofort ans Werk, den preußischen Staat von Grund auf zu erneuern. Durch einen Umbau des Staates wollte er das Volk zu lebendiger Teilnahme am staatlichen Leben erziehen. Die einzelnen Stände wurden durch Gesetz vom 9. Oktober 1807 beseitigt. Der Bauer wurde frei und war nicht mehr an die Scholle gebunden. Die Städte erhielten das Recht der Selbstverwaltung. Die Staatsverwaltung gestaltete er neu. Das bisherige Generaldirektorium wurde durch Fachminister ersetzt.

Steins Werk bedeutete eine gewaltige Umwälzung. Es darf uns daher nicht wundernehmen, daß er viele Gegner hatte, die eifrig auf seinen Sturz hinarbeiteten. Seine Stellung wurde unhaltbar, als ein Brief Steins, in dem

er offen für die Vorbereitung einer Volkserhebung eintrat, in Napoleons Hände fiel. Stein wurde entlassen und mußte nach Rußland fliehen.

Sein Werk setzte Hardenberg fort, der die Gewerbefreiheit und die Freizügigkeit einführte. Hand in Hand mit diesen Reformen bauten Scharnhorst und Gneisenau das Heer auf der Grundlage der allgemeinen Wehrpflicht neu auf. Die Bestimmungen des Tilsiter Friedens umging Scharnhorst durch die Einführung des Krümpersystems, d. h. ein Teil der Linientruppen wurde jeweils nach kurzer Ausbildung entlassen und durch Neueinstellungen ersetzt.

All diese Reformen hätten nicht genügt, um das Joch der Knechtschaft abzuschütteln und dem Volke die Freiheit wieder zu erringen, wenn sich nicht auch gleichzeitig ein grundlegender Wandel in der geistigen Haltung des Volkes vollzogen hätte. Die großen Dichter und Denker der damaligen Zeit haben das Volk immer wieder aufgerüttelt und ihm die Begriffe „Ehre, Freiheit, Volk und Vaterland" nahegebracht. Ihnen vor allem ist es zu danken, daß das Volk über alle kleinstaatlichen Grenzen hinweg allmählich lernte, deutsch zu fühlen und deutsch zu denken.

In diese Zeit völkischen Erwachens fallen die Vorbereitungen Napoleons zu einem Feldzug gegen Rußland, das seine weitere Teilnahme an der Festlandssperre verweigerte. Mit einer Armee von 600000 Mann, zu der fast alle europäischen Staaten beitragen mußten, brach Napoleon im Sommer 1812 auf.

Die Russen stellten sich nicht zur Schlacht, sondern zogen sich weit in das Innere des Landes zurück und verwüsteten die geräumten Landstriche. Erst bei Smolensk und bei Borodino kam es zu Kämpfen, die für Napoleon siegreich endeten. Unbehelligt konnte er in Moskau einziehen, das die Russen geräumt und vorher niedergebrannt hatten. Napoleon mußte umkehren, da er für den Winter keine Unterkunft und Verpflegung für seine große Armee hatte. Auf dem Rückzug bedrängten die Russen das französische Heer ständig. Was im Kampfe verschont blieb, fiel dem Hunger, der Kälte und der Überanstrengung zum Opfer. Beim Übergang über die Beresina verloren noch viele Tausende ihr Leben, da die Brücke unter den zurückflutenden Massen zusammenbrach. Napoleon selbst eilte seinem Heere im Schlitten nach Paris voraus, um ein neues Heer auszuheben und den Kampf wieder aufzunehmen.

Der Zusammenbruch der „Großen Armee" ließ die europäischen Völker aufhorchen. In Preußen wartete das Volk auf den Ruf zu den Waffen. Doch der König zögerte. Da wagte General Yorck den entscheidenden Schritt. Er schloß mit den Russen die „Konvention von Tauroggen", die dem Kampf zwischen Preußen und Rußland ein Ende machte. Nach anfänglichem Zögern rief der König am 3. Februar 1813 zur Bildung von Freiwilligenkorps auf und erklärte am 16. März an Frankreich den Krieg. Tags darauf erschien der berühmte Aufruf „An mein Volk".

Der Ruf des Königs wurde mit heller Begeisterung im Volk aufgenommen. Aus allen Bevölkerungsschichten strömten die Männer zu den

Waffen, und die Daheimgebliebenen überboten sich in freiwilligen Gaben für die Ausrüstung der Armee. In wenigen Wochen glich Preußen einem gewaltigen Heerlager.

Nach den Erfolgen bei Großgörschen und Bautzen mußte Napoleon einen Waffenstillstand abschließen. Schließlich stellten sich Österreich und Schweden auf die Seite der Verbündeten, die Napoleon bei Großbeeren und Dennewitz und an der Katzbach schlugen und sein Heer in der Völkerschlacht bei Leipzig vernichteten. Deutschland war bis zum Rhein frei. Der Rheinbund löste sich auf. Blücher überschritt in der Neujahrsnacht 1813/14 bei Kaub den Rhein und trug den Krieg nach Frankreich hinein. Am 31. März 1814 zogen die Verbündeten in Paris ein.

Napoleon mußte abdanken und bekam die Insel Elba als selbständiges Fürstentum zugewiesen. Frankreich behielt Elsaß-Lothringen. Die gegenseitige Eifersucht der Siegermächte machte die Hoffnungen der deutschen Patrioten zunichte und ließ das geschlagene Frankreich im Besitz urdeutscher Gebiete.

Diese Uneinigkeit erweckte in Napoleon neue Hoffnungen. Mit wenig Begleitern landete er überraschend in Südfrankreich und konnte in kurzer Zeit ein Heer aufstellen. Sofort hörten in Wien alle Streitigkeiten auf, die Heere zogen wieder nach dem Westen. Zum zweiten Male überschritt Blücher mit seinen Preußen den Rhein. Er wurde zwar bei Ligny geschlagen, konnte aber den Engländern zu Hilfe kommen und mit diesen vereint Napoleon bei Belle-Allianz am 18. Juni 1815 besiegen.

Auch der zweite Pariser Friede ließ Frankreich im Besitz von Elsaß-Lothringen. Napoleon wurde auf die Insel St. Helena verbannt. Dort starb er nach sechs Jahren.

In Wien versammelten sich die Vertreter der europäischen Staaten zum „Kongreß", um Europa neu zu ordnen. Doch die Arbeit zog sich in die Länge, da die meiste Zeit mit Festessen, rauschenden Ballfestlichkeiten und Theateraufführungen vergeudet wurde. Nach langen Streitigkeiten wurde eine Einigung erreicht, die die Wiederherstellung der europäischen Großmächte zum Ziel hatte. Österreich bekam seine verlorenen Gebiete zurück. Preußen behielt aus seinen Erwerbungen aus der 2. und 3. Teilung Polens Posen, Thorn und Danzig und erhielt neu die nördliche Hälfte Sachsens, Vorpommern, die Rheinprovinz und den größten Teil Westfalens. Rußland wurde das Herzogtum Warschau und Finnland zugesprochen, und England bekam die den Holländern weggenommenen Kolonien Kapland und Ceylon. Außerdem konnte es die Flottenstützpunkte Malta und Helgoland behalten. Die Personalunion mit Hannover blieb bestehen.

Die deutschen Patrioten erlebten eine gewaltige Enttäuschung. Ihr Traum von der Errichtung eines einigen deutschen Reiches ging nicht in Erfüllung. Dafür bildeten 39 einzelne, selbständige Staaten ein loses Staatengefüge: den deutschen Bund. Ihm gehörten auch ausländische Staatsoberhäupter an, so der König von England für Hannover, der König

von Dänemark für Holstein und Lauenburg und der König der Niederlande für Luxemburg. So hatte das Ausland jederzeit die Möglichkeit, sich in die deutschen Angelegenheiten einzumischen, zumal in der Vertretung des Bundes, dem Bundestag zu Frankfurt a. M., alle Beschlüsse einstimmig gefaßt werden mußten.

Da der Wiener Kongreß kläglich versagte, entstand bald im Volke eine Bewegung, die versuchte, die Einigung des Reiches herbeizuführen. Getragen wurde sie in der Hauptsache von den Freiheitskämpfern und den Studenten, die gegen den Widerstand der deutschen Fürsten zu kämpfen hatten. Durch die Gründung des Deutschen Zollvereins 1834 wurde der äußere Rahmen für das spätere Deutsche Reich geschaffen. Die politischen Einigungsbestrebungen scheiterten letzten Endes immer wieder an dem preußisch-österreichischen Gegensatz. Es mußte erst der Mann kommen, der diesen unseligen Wettstreit mit Gewalt löste. Dieser Mann war Bismarck, der am 18. Januar 1871 das Kleindeutsche Reich gründete. Das Großdeutsche Reich zu errichten und so den jahrhundertealten Traum aller Deutschen zu erfüllen, war Adolf Hitler vorbehalten.

Brandenburg—Preußen

Die Mark Brandenburg, die Wiege des brandenburg-preußischen Staates, war bis zur germanischen Landnahmezeit von germanischen Völkerschaften bewohnt. Erst nach dem Abzug der Germanen drängten slawische Stämme nach und besetzten das Gebiet zwischen Elbe und Oder. Karl der Große (768—814) nahm den Kampf gegen die Slawen erfolgreich auf und gebot ihren Einfällen Einhalt, indem er an der mittleren Elbe die Sorbische Mark gründete. Heinrich I. (919—936) drang in das Havelgebiet vor und eroberte die wendische Hauptstadt Brennaburg, die bald Mittelpunkt der neugegründeten Nordmark wurde. Im dauernden Kampf mit den Wenden ging das Land vorübergehend den Deutschen verloren, bis endlich ein Graf von Zollern 1417 mit der Mark Brandenburg belehnt wurde. Die Hohenzollern griffen rücksichtslos durch und stellten in kurzer Zeit Ruhe und Ordnung her.

In den Dreißigjährigen Krieg (1618—1648) wurde auch Brandenburg hineingezogen, obwohl dessen Kurfürst sich ängstlich mühte, die Neutralität zu wahren. Als Friedrich Wilhelm, der Große Kurfürst, 1640 zur Regierung kam, hatte Brandenburg schwer unter dem Krieg zu leiden. Um seinem Lande selbst Verwüstungen und Verheerungen zu ersparen, schloß er einen Waffenstillstand mit den Schweden. Da er aber bald einsah, daß ohne eine Wehrmacht nicht einmal die Neutralität aufrechtzuerhalten war, schuf er ein stehendes Heer, das er in kurzer Zeit auf 8000 Mann brachte. Die Offiziere, die durchweg dem Adel entnommen wurden, ernannte der Kurfürst selbst. In Kleidung und Bewaffnung war das Heer einheitlich ausgerüstet. Die Ausbildung wurde nach einem besonderen Plan

durchgeführt. Die Truppen lagen in Bürgerquartieren, besondere Verpflegungskommissionen (daher der Name Kommiß, Kommißbrot) sorgten für ihren Unterhalt. Das brandenburg-preußische Heer galt bald als eines der besten in der ganzen Welt. Beim Tode des Großen Kurfürsten (1688) war es bereits 30000 Mann stark.

Der Westfälische Friede (1648) war für den Großen Kurfürsten eine schwere Enttäuschung. Er hatte gehofft, ganz Pommern zu erhalten und mit Stettin den wichtigsten Ostseehafen in die Hand zu bekommen. Statt dessen mußte er sich mit dem hafenarmen Hinterpommern begnügen, während die Schweden Vorpommern mit Stettin an sich rissen. Der Nordische Krieg, zwischen Schweden und Polen um die Vorherrschaft über die Ostsee geführt, brachte dem Großen Kurfürsten die volle Souveränität in Preußen.

Im sogenannten Holländischen Krieg, den Ludwig XIV. um die Rheinmündung führte, stand der Große Kurfürst auf seiten des Kaisers. Um den tatkräftigsten seiner Gegner loszuwerden, veranlaßte Ludwig XIV. die Schweden zu einem Einfall in die Mark Brandenburg. Auf die Kunde hiervon rückte der Große Kurfürst in Eilmärschen nach der Mark und schlug die Schweden in der Schlacht bei Ferbellin (1675). Das brandenburgische Heer hatte dort einen Sieg errungen, der in ganz Deutschland und weit über seine Grenzen hinaus Verwunderung erregte und seinem Führer den Titel „Großer Kurfürst" eintrug. Die Schweden sahen sich gezwungen, Pommern und die Insel Rügen zu räumen. Trotzdem mußten im Frieden zu St. Germain (1679) auf den Druck Frankreichs hin alle Gebiete, die den Schweden abgenommen worden waren, zurückgegeben werden, da der Kaiser Brandenburg schmählich im Stich gelassen hatte.

Gegen Ende seiner Regierungszeit trug sich der Große Kurfürst mit dem Plan, eine Kriegsflotte zu bauen, um sich mit ihrer Hilfe seinen Anteil an der damals einsetzenden Aufteilung der Erde zu sichern. Er erwarb deshalb den Hafen Emden (1683) und schuf in kurzer Zeit eine ansehnliche Flotte von 13 Schiffen. Mit ihr gründete er an der Guineaküste in Mittelafrika eine brandenburgische Kolonie. Wenn diese auch wegen der großen Zuschüsse, die sie erforderte, nicht gehalten werden konnte und später an die Holländer verkauft wurde, so legte ihre Gründung doch Zeugnis ab von dem kühnen Unternehmungsgeist des Großen Kurfürsten und hat Brandenburg-Preußen und dem späteren Deutschland den Weg hinaus in die Weltpolitik gewiesen.

Den kriegerischen Leistungen des Großen Kurfürsten stehen seine Verdienste um den Aufbau des Staates, um die Hebung der Landwirtschaft, des Gewerbes, des Handels und des Verkehrs keineswegs nach. Vielmehr ist er gerade durch sie zum eigentlichen Begründer des brandenburg-preußischen Staates geworden.

Dieser Staat bildete keine Einheit. Neben dem Kern des Staates, der Mark Brandenburg, gebot der Große Kurfürst über das abgelegene Preußen und die rheinischen Besitzungen (Abb. 126). Den Bewohnern dieser Landes-

teile fehlte das Gefühl der Zusammengehörigkeit. Ihre verfassungsmäßigen Vertretungen, die Stände, wachten mit Eifersucht über ihre „wohlerworbenen“ Rechte, gleichviel, ob diese den Interessen des Ganzen widersprachen oder nicht. Mit eiserner Strenge verschaffte sich der Große Kurfürst Anerkennung seines Willens. Das Wohl des Ganzen ging ihm über alles, er fühlte sich in all seinem Tun und Treiben stets seinem Volke verpflichtet.

Nachdem der Staat geordnet war, konnte Friedrich Wilhelm darangehen, den Wohlstand des Landes zu heben. Er rief aus den Niederlanden und Friesland Tausende von Kolonisten herbei und siedelte sie in der Mark an. Ihrer emsigen Arbeit und ihrer praktischen Erfahrung war es zu verdanken, daß nicht nur die Kriegsschäden behoben, sondern daß darüber hinaus die Sümpfe an der Havel, Oder und Warthe trockengelegt, durch Deiche geschützt und in fruchtbares Ackerland verwandelt wurden. Die endlose Aufteilung und Zersplitterung der Bauernhöfe unterblieb, da der Staat für die nachgeborenen Söhne in den urbar gemachten Gebieten reichlich Siedlungsland zur Verfügung stellen konnte. Gewerbe und Industrie schützte der Kurfürst durch hohe Einfuhrzölle.

Als der Große Kurfürst im Jahre 1688 die Augen schloß, war eine der machtvollsten Persönlichkeiten des Jahrhunderts dahingegangen. Er hat den brandenburg-preußischen Streubesitz zu einem festgefügten Staatswesen zusammengeschweißt und das Volk zu treuer Mitarbeit und zu völliger Hingabe an den Staat erzogen. In der Sorge um Brandenburg hat der Große Kurfürst auch für die Zukunft Deutschlands wertvolle Vorarbeit geleistet. Brandenburg wurde die Keimzelle Preußens und damit des Deutschen Reiches.

Der Nachfolger Friedrich Wilhelms, sein Sohn Friedrich III., gab seinem Staat nach außen die ihm gebührende Stellung und Ehre. Er erhielt die Zustimmung des Kaisers, daß er sich die Königskrone aufsetzen durfte. Das geschah am 18. Januar 1701 in Königsberg. Als „König von Preußen“ nannte er sich Friedrich I.

Mit Friedrich Wilhelm I. (1713—1740) trat die brandenburg-preußische Geschichte in ein neues Stadium der Entwicklung ein. Dieser König schuf die Grundlagen für den späteren Aufstieg Preußens zur europäischen Großmacht. Nicht durch Kriege und Eroberungen trat er hervor, sondern sein Werk war der einheitliche Ausbau des Staates, dessen Grundlagen der Große Kurfürst abgesteckt hatte. Er wußte, daß ein Staat nur bestehen kann, wenn er Macht hat. Deshalb schuf er ein schlagkräftiges Heer. Um dieses zu erhalten, brauchte er Einnahmen. Diese sicherte er sich durch eine mustergültige Staatsverwaltung mit einem vorbildlichen Beamtentum. Heer und Beamtentum sind seit Friedrich Wilhelm I. die Stützen des Staats geworden.

Die Regierungszeit des Soldatenkönigs war durch das Verhältnis zu seinem Sohne getrübt. Als der Vater sah, daß der Sohn allmählich seiner Führung entglitt, versuchte er, ihm mit Strenge beizukommen. Die un-

würdige Behandlung ließ im Kronprinzen den Plan zur Flucht reifen. Diese mißlang, und der Mitwisser, Leutnant Katte, wurde vor den Augen des Kronprinzen hingerichtet. Der Opfertod des Freundes, der ihn in tiefster Seele ergriff, bedeutete einen Wendepunkt in Friedrichs Leben. Er erkannte, daß die ganze Arbeit eines Herrschers nur dem Wohle des Staates zu dienen habe. Eine harte Schule bereitete ihn auf seinen königlichen Beruf vor. Mit 28 Jahren übernahm er als Friedrich II. 1740 die Regierung.

Nach dem Tode von Kaiser Karl VI. kam dessen Tochter Maria Theresia auf den österreichischen Thron. Verschiedene deutsche Fürsten erkannten aber die weibliche Thronfolge nicht an. Friedrich benutzte die Schwierigkeiten der jungen Fürstin, um alte Ansprüche seines Hauses auf Schlesien geltend zu machen. Im Dezember 1740 rückte der König in Schlesien ein und bot gleichzeitig Maria Theresia ein Bündnis an, in dem er Niederschlesien verlangte und dafür Truppen und Gelder für die Verteidigung ihrer Erbansprüche zu-

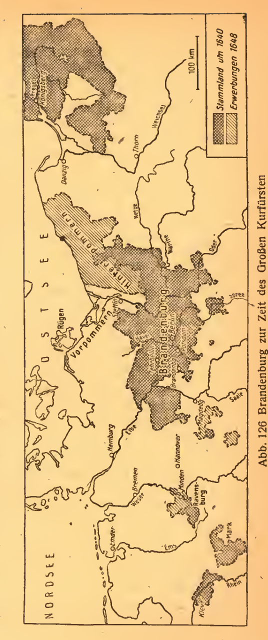


Abb. 126 Brandenburg zur Zeit des Großen Kurfürsten

sagte. Maria Theresia lehnte ab und forderte die Räumung Schlesiens. Im Frieden zu Breslau (1742) mußte sie Friedrich Schlesien mit der Grafschaft Glatz überlassen.

Von ihrem mächtigsten Gegner befreit, erzielten die Österreicher gegen die anderen Feinde gewaltige Erfolge. Friedrich fürchtete, daß Maria Theresia nach der Niederwerfung ihrer Feinde den Versuch machen würde, ihm Schlesien abzunehmen. Um dem drohenden Angriff zuvorzukommen, fiel der König überraschend in Böhmen ein, mußte aber dann nach Schlesien zurückweichen. Bei Hohenfriedberg brachte er 1745 dem feindlichen Heere eine vernichtende Niederlage bei. Weihnachten 1745 wurde der zweite Schlesische Krieg durch den Frieden zu Dresden beendet. Friedrich blieb im Besitz von Schlesien.

Noch ein dritter Krieg, bekannt unter dem Namen „Siebenjähriger Krieg", mußte geführt werden, ehe Schlesien endgültig Preußen einverleibt wurde. Maria Theresia hatte es verstanden, durch Bündnisse mit Rußland, Frankreich, Sachsen und Schweden Preußen einzukreisen. Heldenmütig ging Friedrich gegen die erdrückende Übermacht zum Angriff vor (1756). Nach der Niederlage bei Kolin konnte er seine Gegner bei Roßbach, Leuthen und Zorndorf besiegen. Als Rußland und Schweden die Kampfhandlungen einstellten, kämpfte Friedrich mit seiner gesamten Macht gegen Österreich und Sachsen. Im Frieden zu Hubertusburg (1763) wurde dem Siebenjährigen Krieg ein Ende gemacht.

Da das außenpolitisch schwache, im Innern stets unruhige Polen eine dauernde Beunruhigung für Preußen bildete, setzte Friedrich durch, daß es zwischen Österreich und Rußland aufgeteilt wurde (1772). Dabei erwarb er Westpreußen (ohne Danzig und Thorn) und den Netzegau. So war eine Brücke nach Ostpreußen hinüber geschlagen und diese Provinz näher an den Kern des preußischen Staates gerückt.

Im Staate Friedrichs des Großen waren rechtlich alle Untertanen gleichgestellt. Aber im wirtschaftlichen und volklichen Aufbau waren jedem Stand besondere Aufgaben zugeteilt.

Die Bauern hatten die Ernährung des Volkes zu sichern und die Soldaten zu stellen. Den Bauernstand förderte der König tatkräftig, denn er wußte, daß er zum Fortbestand des Staates gesund bleiben mußte. Aus Brüchen, Sümpfen und Ödländereien ließ er neues Bauernland gewinnen.

Handel und Gewerbe betrieb im friderizianischen Staate der Bürger. Er sollte Geld verdienen und mit den Steuern dem Staate Geld verschaffen. Dagegen war es ihm verwehrt, seinen Gewinn in bäuerlichem oder herrschaftlichem Landbesitz anzulegen. Durch Schutzzölle wehrte der König die Einfuhr fremder, insbesondere englischer Waren ab. Für Waren, die die einheimische Bevölkerung selbst anfertigen konnte, durfte kein Geld ins Ausland gehen.

Der Adel stellte dem König die Offiziere und die hohen Beamten. Vom Offizier verlangte Friedrich ein ausgeprägtes Ehrgefühl, das er den aus allen Ländern zusammengeworbenen Soldaten nicht zutraute.

Der König fühlte sich als „der erste Diener seines Staates". Alle Regierungsgeschäfte liefen durch seine Hand. Wenn er auch Fachministerien für alle Zweige der Verwaltung, für Krieg, Handel, Gewerbe, Forstwirtschaft, Bergbau und Schulwesen einrichtete, so hatten doch die Minister nur seine Befehle auszuführen, die als „Kabinettsordres" ins Land hinausgingen. Trotz Gicht und körperlicher Beschwerden, die er sich in seinen Feldzügen zugezogen hatte, reiste er unermüdlich im Lande umher, prüfte selbst alle Neuanlagen, ließ sich genau Bericht erstatten und gab neue Anregungen.

Besondere Sorgfalt verwendete der König auf die Förderung der Rechtspflege. Die Folter schaffte er als menschenunwürdig ab. Unter seiner Regierung wurde das „Allgemeine Landrecht für die preußischen Staaten" vorbereitet. Das umfangreiche Gesetzbuch trat aber erst nach seinem Tode in Kraft.

Wie in seiner Jugend, so pflegte Friedrich auch als König Kunst und Wissenschaft. Die Philosophie, das Bemühen, alle Dinge zutiefst zu ergründen, belebte sein ganzes Wesen, und ihr verdankt er sein tiefes Verständnis für die Fragen der Zeit. Über die kirchlichen Streitfragen war er erhaben. In seinem Staate konnte „jeder nach seiner Fasson selig werden". Katholiken und Juden ließ er ihre Religion ausüben, aber für die höheren Stellen der Verwaltung bevorzugte er Protestanten.

Seinen Kunstsinn bestätigte der große König durch Errichtung großartiger Bauten und Anlagen von schönen Plätzen und Straßen. Schon in seiner Jugend hatte Friedrich viel und gern musiziert. Als König veranstaltete er jene berühmten Konzerte, in denen er selbst die Flöte blies. Auch als Komponist (z. B. des Hohenfriedberger Marsches) offenbart er sich als feinsinniger Künstler.

Das Preußen Friedrichs des Großen zeigt das Bild eines aufstrebenden Staates. Die Bauern ringen mit Eifer dem kargen Boden die Nahrung ab und stellen den Kern der Wehrmacht. Die Bürger schaffen mit Handel und Gewerbe Wohlstand und Reichtum. Der Adel führt in Heer und Verwaltung. Der König, ein Genie als Feldherr und Staatsmann, als Denker, Dichter und Künstler, verleiht dem Ganzen den hohen Schwung. Während das Reich in den Jahrzehnten nach dem großen König zerbricht und deutsche Fürsten ihre Königskronen von Napoleons Gnaden erbetteln, hält Preußen aller Notzeit stand. Sein staatliches Gefüge bildet den Kern des Bismarckreiches, und preußische Pflichtauffassung, Ausdauer und Tatkraft beseelen das Großdeutsche Reich.

Reich und Volk im europäischen Raum

Das Deutsche Reich vor dem Weltkrieg umfaßte etwa 540000 km² und wurde von ungefähr 68 Millionen Menschen bewohnt. Darunter war der Hundertsatz der Nichtdeutschen so gering, daß das Deutsche Reich als ein

völkisch geschlossener Staat bezeichnet werden konnte. Aber nicht alle Deutschen Mitteleuropas gehörten dem Reiche an. So lebten z. B. fast 7 Millionen Deutsche in Österreich-Ungarn. Wir bezeichnen daher das Reich Bismarcks als „Kleindeutsches Reich".

Dieses Kleindeutsche Reich im Herzen Europas hatte acht Nachbarn: Rußland, Österreich, Schweiz, Frankreich, Luxemburg, Belgien, Holland und Dänemark. Kein anderer europäischer Staat hat soviel Anlieger. Und wie steht es mit den natürlichen Grenzen, die im Falle eines Angriffes Schutz bieten sollen? Da finden wir nur die Alpen, den Wasgenwald, die Randgebirge an der deutsch-österreichischen Grenze und die Nord- und Ostsee. Weite Gebiete unseres Vaterlandes, im Nordwesten gegen Holland und Belgien und vor allem im Osten gegen das damalige Rußland, waren ohne natürlichen Schutz.

Die schwerste Gefahr, die Deutschland durch seine Mittellage von jeher drohte, war die des Zweifrontenkrieges und der Einkreisung. Nach dem für Deutschland unglücklichen Ausgang des Weltkrieges sollte die Einkreisung und damit die Niederhaltung Deutschlands durch das Versailler Friedensdiktat verewigt werden.

Versailles bedeutet einen Angriff auf deutschen Boden; denn wertvolles deutsches Land mußte abgetreten werden. Es fielen

an Frankreich:	Elsaß-Lothringen,
„ Belgien:	die Kreise Eupen und Malmedy,
„ Dänemark:	Nordschleswig,
„ Litauen:	das Memelland,
„ Polen:	$^{9}/_{10}$ der Provinz Posen, $^{2}/_{3}$ der Provinz Westpreußen, der ostpreußische Kreis Soldau, Teile Niederschlesiens und Ostoberschlesien. Danzig mit etwa 300000 Deutschen wurde „Freistaat", also vom Reiche losgerissen,
„ die Tschecho-Slowakei:	das Hultschiner Ländchen (Abb. 127).

Außerdem verlor Deutschland sämtliche Kolonien. Das Saargebiet wurde bis 1935 einer vom Völkerbund eingesetzten Regierungskommission unterstellt. So umfaßte das Rumpfdeutschland von Versailles nur noch 470000 km² mit 61,5 Millionen Einwohnern. Trotz der Verminderung des Flächenraumes war die neue Reichsgrenze um 100 km länger als die alte; die Zahl der Nachbarn erhöhte sich von 8 auf 11.

Noch trostloser wurde die Lage Deutschlands im europäischen Raum, wenn wir uns die Folgen der Wehrlosmachung für den deutschen Reichsboden verdeutlichen. Auf dem gesamten linken Rheinufer und 50 km rechts des Rheines durften keine Standorte und keine Befestigungen angelegt werden. Für die deutschen Küsten und für Helgoland bestand ein Befestigungsverbot. Ferner lag eine befestigungslose Zone südlich der Donau und an der gesamten tschechischen und polnischen Grenze. Ostpreußen blieb bis auf das kleine „Heilsberger Dreieck" unbefestigt. So deckte sich



Abb. 127 Das Deutsche Reich 1919—1935

also die Grenze der deutschen Wehrhoheit nirgends mit der deutschen Reichsgrenze.

In seinem Kampf um die Wiederherstellung der Ehre und Freiheit Deutschlands hat der Führer alle Gebiete, die uns durch den Schandvertrag von Versailles entrissen wurden, dem Reich wieder eingegliedert. Darüber hinaus führte er Millionen von Deutschen entweder durch Eingliederung oder durch Umsiedlung dem Mutterlande zu.

So schuf er das „Großdeutsche Reich" mit 97 Millionen Einwohnern, die auf einer Fläche von 730000 km² wohnen. Verglichen mit den gewaltigen Räumen, die andere Völker in wenigen Jahrhunderten in allen Teilen der Erde in Besitz genommen haben, erscheint das Reich als ein sehr kleines Staatsgebilde. England beherrscht ein Viertel der bewohnten Erde, das Deutsche Reich soll sich mit noch nicht einem Zweihundertstel begnügen. In Deutschland leben 133 Menschen auf etwa 1 km², in Frankreich mit Kolonien 9, im Britischen Reich mit Kolonien 12, in Belgien mit Kolonien 8 und in Holland mit Kolonien 29 auf 1 km². Diese kurze Gegenüberstellung läßt unsere Raumnot klar erkennen. Die Ernährungs- und Rohstoffbasis

ist für unser aufstrebendes und gesundes Volk zu gering. Das Lebensrecht unseres Volkes verlangt deshalb Kolonialbesitz.

Erschwerend zu der Raumnot tritt noch der Umstand hinzu, daß durch die Industrialisierung Deutschlands seit der Mitte des 19. Jahrhunderts gewaltige Menschenmassen in den Industriegebieten zusammengedrängt worden sind. So hat das Saarland heute eine Dichte von 424, Sachsen von 450 und Kernstücke des Ruhrgebietes von 1000 auf 1 km².

Den steigenden Arbeiterbedarf stellt das Land. Dadurch wurden viele Deutsche dem Boden entfremdet. Sie verloren an Gesundheit und Leistungsfähigkeit in den engen Verhältnissen der Stadt.

Abb. 128 zeigt, daß im Jahre 1871 von 41 Millionen Einwohnern fast 30 Mill. Bewohner Landgemeinden angehörten, 1890 von 49 Mill. Einwohnern etwa die Hälfte in Landgemeinden, die andere Hälfte in Klein-, Mittel- und Großstädten lebte. 1933 war jeder dritte Deutsche ein Großstädter! Die Menschen im Osten hatten keine rechten Verdienstmöglichkeiten, während der Westen mit seiner Industrie erhöhtes Einkommen und bessere Lebenshaltung in Aussicht stellte. Durch diesen Anreiz wurde die Grenzbevölkerung geradezu zur Abwanderung gedrängt. Der ganze Osten blieb um 1925 mit seinen Einkommensverhältnissen 15 bis 35% und mehr unter dem Reichsdurchschnitt. Hätte man damals schon das Staatswohl über die Interessen der freien Wirtschaft gestellt, so wäre die Entvölkerung des Ostens verhütet worden.

Die Landwirtschaft im Westen und Süden konnte schon bald eine solche Zahl von Arbeitskräften nicht beschäftigen. Der ländlichen Bevölkerung blieb also nur übrig, in der Industrie Arbeit zu suchen. Die Folge davon war die Übersiedlung in die Stadt und schließlich das Elend der Arbeitslosigkeit.

Im entvölkerten Osten dagegen lagen große Landflächen brach. Weite Gebiete warteten auf die Urbarmachung durch die Arbeit fleißiger Menschen. Die aber hausten zum Teil erwerbslos in den Goßstädten und fanden nicht die Kraft zur Umkehr. Dafür drängten in Scharen die polnischen Wanderarbeiter in die Ostprovinzen. Die Gefahr der „Unterwanderung" war für die dünnbesiedelten Grenzräume besonders groß, weil der frühere polnische Staat an seiner Westgrenze dichter besiedelt war als der deutsche Osten. Bis 1933 zogen ständig Erntearbeiter aus Polen nach Deutschland.

Als der Führer die Macht übernahm, ging die Regierung sofort dazu über, für eine Gesundung der Verhältnisse zu sorgen. Die Ein- und Auswanderung wird auf das schärfste überwacht. Durch Bodenverbesserung (Reichsarbeitsdienst) und verkehrstechnische Erschließung des Landes (Bau von Straßen, Kanälen und Eisenbahnlinien) werden die Erträge der Landarbeit lohnender gestaltet. Planmäßig werden Siedler angesetzt. Bevorzugt werden dabei Söhne von Bauern aus dem Reich und ehemalige Berufssoldaten. Durch die Einführung des Landjahres und des weiblichen Arbeitsdienstes sind nicht nur Arbeitskräfte gewonnen, sondern es wurde zugleich ein Weg gefunden, in dem jugendlichen Städter die Liebe zum

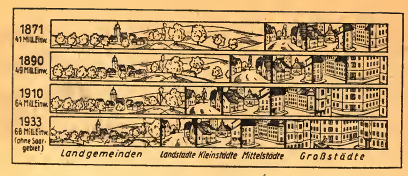


Abb. 128 Verteilung der deutschen Bevölkerung auf Stadt und Land

Landleben zu wecken. Mit allen Mitteln tritt der Staat der Landflucht entgegen. Es bedeutet für den Staat eine Gefahr, wenn seine städtische Bevölkerung auf über 30 bis 40% der Gesamtbevölkerung ansteigt. Bäuerlicher Grund und Boden wird dann leicht zur Handelsware. Die Menschen werden von der Scholle gelöst und verlieren ihre wirtschaftliche Unabhängigkeit. Die landwirtschaftliche Erzeugung geht zurück, und durch Einfuhr muß ersetzt werden, was nicht im Lande erzeugt werden kann. Die Großstädte werden die Massengräber des ländlichen Bevölkerungsüberschusses. Die Kinderzahl sinkt und damit die Zahl der Arbeitskräfte und auch die Wehrkraft des Volkes.

Diese für das Reich verderbliche Entwicklung ist beendet. Das Bauerntum ist wieder Träger deutscher Kraft und Zukunft geworden. Das Erbhofgesetz begünstigt den gesunden Mittelbesitz, die Aufteilung des Großgrundbesitzes schafft Siedlungsland.

Von Bedeutung sind auch die Bestrebungen einer Umlagerung der Industrie von der Stadt auf das Land. Im Reich bestehende Industrien werden zum Teil nach dem Osten verlagert. Dadurch findet auch der Arbeiter leicht ein gesundes Heim für sich und seine Familie.

Was aber nutzen alle Maßregeln der Gesetzgeber, wenn das Volk nicht den Willen zum Leben und zur Unsterblichkeit in sich trägt?

Eine Folge der Verstädterung und ihrer Einflüsse war ein erschreckender Geburtenrückgang, der in der Nachkriegszeit besonders stark auftrat, wie folgende Übersicht zeigt:

Auf 1000 Einwohner	1913	1918	1928	1930	1932	1934	1936
Geboren	22,7	14,4	18,0	17,5	15,1	18,0	19,0
Überschuß	12,1	—10,5	7,6	6,5	4,3	7,1	7,2

Im Jahre 1932 betrug der Geburtenüberschuß etwa nur ein Drittel von dem im Jahre 1913.

Am stärksten ging die Geburtenzahl in den Großstädten zurück. Diese Erscheinung bedrohte den Bestand der Nation; denn die Geschichte duldet keine leeren oder schwach besiedelten Räume. Der bevölkerungspolitische Druck des Slawentums wäre zu einer Gefahr für die Nation geworden.

Seit 1933 begann der Kampf gegen den Geburtenrückgang. Für den neuen Staat bedeutet die kinderreiche Familie die Grundlage eines gesunden Volkes.

Aber nicht allein die Zahl, sondern erst die Tüchtigkeit der einzelnen Menschen ist von Bedeutung für die Kulturhöhe eines Volkes. Falsche Auslese vermindert die Kulturleistungen. Der Charakter des Volkes aber ist bedingt durch die Reinheit des Blutes. Der Wert des Volkes liegt in seiner Rasse. Darum schützen seit 1935 die „Nürnberger Gesetze" deutsches Blut vor der Vermischung mit andersartigem. So erziehen wir eine Generation, die gesund und leistungsfähig sein wird und die in der Lage ist, das auszubauen, was heute unter großen Opfern angebahnt wird.

Die Lagerstätten der wichtigsten Bodenschätze und Rohstoffe in Deutschland

Wir haben in Deutschland einige Gebiete, in denen sich unsere Industrie zusammenballt, so das rheinisch-westfälische, das oberschlesische und das mitteldeutsche Industriegebiet (Abb. 129). Warum hat sich in diesen Gegenden die Großindustrie so stark entwickeln können? Zwei Rohstoffe geben den Grund für den gewaltigen Aufbau: Kohle und Eisen. Beide kommen in jenen Gebieten reichlich vor und haben die Bildung dieser machtvollen Industriebezirke begünstigt.

Weitaus an der Spitze der deutschen Steinkohlenförderung steht das rheinisch-westfälische Gebiet mit rund 70% der gesamten deutschen Förderung und 80% der deutschen Kokserzeugung. Die Mächtigkeit der Flöze beträgt dort an vielen Stellen bis zu 6 m. Der gesamte Vorrat des Ruhrgebietes an Steinkohlen wird so hoch geschätzt, daß er noch für mehrere Jahrhunderte reicht. Die Fortsetzung des Ruhrgebietes nach Westen bildet das linksrheinische oder Aachener Revier. Es reicht im Norden bis an die holländische Grenze und im Westen bis zum belgisch-nordfranzösischen Kohlenzug.

Das Kohlengebiet, das dem rheinisch-westfälischen an Mächtigkeit am nächsten kommt, liegt in Oberschlesien. Durch den Schandvertrag von Versailles war es in drei Teile zerrissen worden. Seitdem durch unseren siegreichen Vormarsch im Osten diese Folgen beseitigt worden sind, hat das oberschlesische Gebiet für unser Wirtschaftsleben seine alte Bedeutung zurückgewonnen.

Steinkohlen werden weiterhin bei Waldenburg in Niederschlesien, im Saargebiet, in Sachsen, im Sudetengau und im Protektorat gefunden. Die Gesamtförderung von Steinkohle stieg von 11,8 Mill. t (1870) auf 186,5 Mill. t (1938).

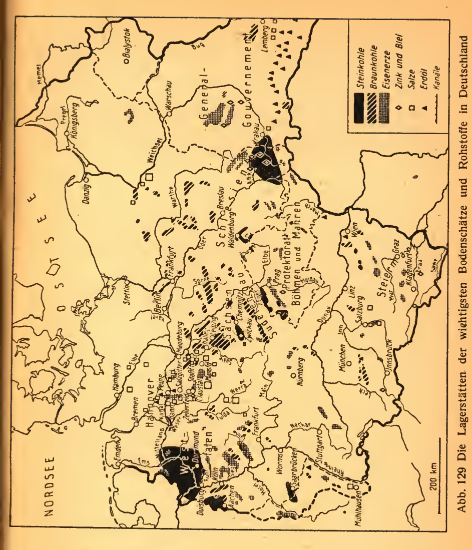


Abb. 129 Die Lagerstätten der wichtigsten Bodenschätze und Rohstoffe in Deutschland

Von den 150 Mill. t Steinkohle, die im Großdeutschen Reich jährlich verbraucht werden, entfällt der Hauptanteil auf die Industrie (37%). Fast die gleiche Menge (36%) wird als Hausbrandkohle in den Öfen verheizt. Die deutschen Eisenbahnen verfeuern in ihren Lokomotiven 11%. Alle übrigen Verbraucher treten mengenmäßig gegenüber diesen drei Großverbrauchern weitgehend zurück. Zur Stromerzeugung in den Elektrizitätswerken werden 7%, in den Gaswerken 6% und in der Schiffahrt 3% verbraucht.

Die Industrie verwendet die Steinkohle nicht nur zur Kesselfeuerung, also als Kraftquelle. Die Kohle gewinnt als Ausgangsstoff für Koks, Farben (Anilinfarben), Riechstoffe und Arzneimittel, wie vor allem auch für Treibstoffe (Benzol, Kohleverflüssigung), künstlichen Kautschuk (Buna) sowie für eine große Zahl neuzeitlicher Werkstoffe dauernd an Bedeutung. Durch die vielseitige Ausnutzung der Kohle ist nicht nur der Ruhm deutscher Erfinder und Forscher in alle Welt getragen worden, sondern auch durch die Erfindung neuer Treib- und Werkstoffe das Deutsche Reich in seiner Kriegswirtschaft blockadefest gemacht und die Treibstoffversorgung unserer gewaltigen Luftwaffe und unserer Heeresmotorisierung ermöglicht worden.

Über den eigenen Bedarf hinaus kann das Großdeutsche Reich bedeutende Mengen Steinkohle an das Ausland ausführen. Hauptabnehmer waren vor dem Kriege die Niederlande, Belgien, Frankreich und Italien.

Die beiden wichtigsten deutschen Steinkohlenlager (rheinisch-westfälisches und oberschlesisches Gebiet) liegen in der Nähe günstiger Wasserstraßen, die für den Massentransport der Kohle von größerer Bedeutung sind als die Eisenbahnen. Der größte Umschlageplatz für Ruhrkohle ist der Duisburg-Ruhrorter Hafen. Rheinabwärts gelangt die Kohle zu den Rheinhäfen der Niederlande, durch den Dortmund-Ems-Kanal zu dem Kohlenhafen Emden und durch den Mittellandkanal bis nach Mitteldeutschland und Berlin. Die oberschlesische Kohle steht durch den Adolf-Hitler-Kanal mit den großen ostdeutschen Wasserstraßen der Oder und Elbe in Verbindung.

Die Braunkohlenförderung übersteigt in der Menge die Steinkohlenförderung, im Werte bleibt sie zurück. Fast alle Braunkohle wird im Tagebau gewonnen. Fünf große Reviere bilden die deutsche Braunkohlengrundlage. Die bedeutendsten Lager finden wir in Mitteldeutschland zwischen Leipzig, Magdeburg und Halle. An zweiter Stelle steht das niederrheinische Braunkohlengebiet westlich von Köln. Fast ebenso groß ist die Förderung im ostdeutschen Bezirk, der sich von der Lausitz über Frankfurt a. d. Oder bis nach dem Wartheland zieht. Dort, wo Werra und Fulda zusammenstoßen, liegt ein weiteres kleines Gebiet. Mengenmäßig zwar weniger umfangreich, aber von außerordentlich hoher Güte sind die Braunkohlen des Egerlandes.

Die Rohbraunkohle verträgt wegen ihres hohen Wassergehalts keine lange Bahnfahrt. Daher wird sie, nachdem der größte Teil des Wassers entzogen worden ist, zu Briketts gepreßt. Die billige Braunkohle ließ in der Nähe ihrer Lagerstätten gewaltige Industrien entstehen. So wurde sie zu einer wichtigen Kraftquelle unserer Elektrizitätsversorgung. Die meisten deutschen Großkraftwerke sind in unmittelbarer Nähe der Braunkohlenlager errichtet. Der Transport der elektrischen Energie über weite Strecken ist wirtschaftlicher als der Transport der Kohle. Neuerdings ist durch die Verschwelung und Verflüssigung der Braunkohle ihre Bedeutung gewaltig gestiegen. Im Leuna-Werk bei Merseburg besitzen wir die größte chemische Fabrik der Welt. Bei der Verschwelung werden Benzol, Paraffin,

Wachse, industrielle Öle, Fette und Teer gewonnen. Durch die Verflüssigung der Braunkohle erhalten wir Motortreibstoffe, wobei 1 t Braunkohle ungefähr 950 kg Benzin liefert (Leunawerk).

Nicht so günstig wie mit Kohle ist Deutschland mit Eisenerzen versorgt. An der Spitze der Eisengewinnung im Altreich stand das Siegerland. Es hat heute die Führung abgegeben an das mitteldeutsche Erzgebiet um Salzgitter und Peine bei Hannover. Dieses verdankt seine Entwicklung dem Umstand, daß es in den letzten Jahren gelungen ist, solche Erze, die wenig Eisen enthalten, wirtschaftlich zu verhütten. Durch die Gründung der Reichswerke AG. für Erzbergbau und Eisenhütten Hermann Göring werden solche Erze der deutschen Erzeugung nutzbar gemacht. Die Entstehung eines neuen industriellen Kraftzentrums in Mitteldeutschland bedeutet eine Entlastung des ohnehin stark beanspruchten Rhein-Ruhr-Sieg-Gebietes. Auch wehrpolitisch ist diese Verlagerung des Schwerpunktes der deutschen Erzförderung ein wesentlicher Vorteil. Verkehrstechnisch ist das mitteldeutsche Gebiet durch ein ausreichendes Kanalsystem mit den übrigen Industriezentren verbunden.

Durch den Anschluß Österreichs erhielt Deutschland ein neues Eisenversorgungsgebiet. In der Steiermark wird das Erz sogar zum Teil im Tagebau gewonnen. Die Reichswerke AG. Hermann Göring haben in Linz an der Donau große Industrieanlagen errichtet, die diese Erze verarbeiten.

Durch unseren siegreichen Vormarsch im Osten sind die Folgen des Schanddiktates von Versailles beseitigt worden und die Erzgruben Oberschlesiens wieder an Deutschland gefallen. Eine weitere Vermehrung ihrer Erzgrundlage hat die deutsche Eisenwirtschaft durch die Minetteerze Lothringens und durch die luxemburgischen Erzgruben erfahren.

Zink- und Bleierze finden wir in der Nähe der oberschlesischen Kohlenvorkommen, im Harz (Claustal, Zellerfeld) und an der Lahn. Kupfer wird im Mansfelder Bezirk, in Hessen, im Harz und im Rheinischen Schiefergebirge gefördert. Nickel kommt in Deutschland an zwei Stellen vor: in der Oberlausitz und in Schlesien.

Das mitteldeutsche Gebiet ist, wie wir gesehen haben, gleichzeitig Hauptsitz der chemischen Industrie. Diese Entwicklung ist nicht nur bedingt durch die Ausbeutung der Braunkohle, sondern auch durch das reiche Vorkommen von Kali- und Steinsalzen in der Nähe von Staßfurt und Halle. 90% der Kalisalze werden von der Landwirtschaft, der Rest von der Industrie aufgenommen. Die Salze werden zu Chlormagnesium, Bittersalz, Glaubersalz, Brom und neuerdings zu Leichtmetallen verarbeitet.

Neben den Salzvorkommen rund um den Harz besitzt Deutschland noch hochwertige Lager an der Werra und bei Mülhausen im Oberelsaß.

Zu einem der wichtigsten Rohstoffe hat sich in den letzten Jahrzehnten das Rohöl entwickelt, das leider in Deutschland nur in geringen Mengen gefunden wird. Vor Ausbruch des Krieges stammten 97% der deutschen Ölerzeugung aus dem hannoverschen Erdölbezirk. Dort sind die Erdöllagerstätten stark mit Kalilagern vermischt. In der Nähe von Hamburg

ist ein sehr ergiebiges Erdölfeld erbohrt worden. Im Elsaß sind wir wieder in den Besitz der Erdölvorkommen von Pechelbronn gelangt. Rechtsrheinisch und in der Gegend von Worms scheinen sich diese Felder fortzusetzen. Im Wiener Becken liefern die Bohrungen bei Zistersdorf Erdöl. Durch die Ostfeldzüge 1939 und 1941 ist dem Deutschen Reich das galizische Erdölgebiet angegliedert worden.

Im Jahre 1933 mußten bei einem Gesamtverbrauch von 1,3 Mill. t Erdöl über 1 Mill. t eingeführt werden. Die inländische Treibstofferzeugung aus Erdöl und aus synthetischem Treibstoff betrug nicht einmal 300000 t. 1937 war der deutsche Verbrauch an Benzin auf das Doppelte gestiegen, die inländische Erzeugung auf mehr als das Vierfache, so daß sie erstmalig größer war als die Einfuhr aus dem Auslande.

Wie durch die Waffenerfolge unserer Wehrmacht dem Reiche große Öllieferungen von Galizien möglich sein werden, so wird sich überhaupt in der Versorgung unserer Industrie mit Rohstoffen, soweit sie aus dem Auslande notwendig sind, nach der Neugestaltung Europas der Schwerpunkt nach dem Osten und nach dem Balkan verlagern. Bisher wurden die Rohstoffe aus dem Ausland in der Hauptsache auf dem Seeweg transportiert. In Zukunft werden wir von diesen Seeverbindungen, die dem Zugriff des Feindes leicht zugänglich sind, unabhängig sein. Damit ist unsere Rohstoffversorgung gesichert.

Verkehrswege im Großdeutschen Raum

Mit der Entwicklung Deutschlands zum größten Industrieland Europas ging Hand in Hand eine Entwicklung unserer Verkehrsmittel und -wege. Rohstoffe sind zu den Verarbeitungsstätten zu transportieren, Fertigerzeugnisse zum Verbraucher zu bringen. Personen müssen befördert werden. Je vielseitiger das Wirtschaftsleben eines Volkes ist, um so ausgebauter muß das Verkehrswesen sein.

Unter allen Verkehrsmitteln nimmt die Eisenbahn nach wie vor die erste Stelle ein. Ihre Vorzüge liegen besonders in der Sicherheit, Zuverlässigkeit, Schnelligkeit, Pünktlichkeit und verhältnismäßigen Billigkeit. Im Personenverkehr ist sie in bezug auf Bequemlichkeit den anderen Verkehrsmitteln überlegen. Fast neun Zehntel des Personen- und drei Viertel des Güterverkehrs entfallen auf die Eisenbahnen.

Der große deutsche Volkswirtschaftler Friedrich List war der erste, der die Bedeutung dieses Verkehrsmittels klar erkannte und in einer Werbeschrift die Grundzüge eines deutschen Eisenbahnnetzes entwarf. Er baute auch 1839 die erstere größere Strecke Dresden–Leipzig, nachdem 1835 bereits die kleine Strecke Nürnberg–Fürth eröffnet worden war.

In der Folgezeit schufen private Gesellschaften und Regierungen nebeneinander das deutsche Bahnnetz. Dabei kam es aus Wettbewerbsgründen oft zu zwecklosen Doppelbauten. Die Grenzgebiete wurden gemieden und

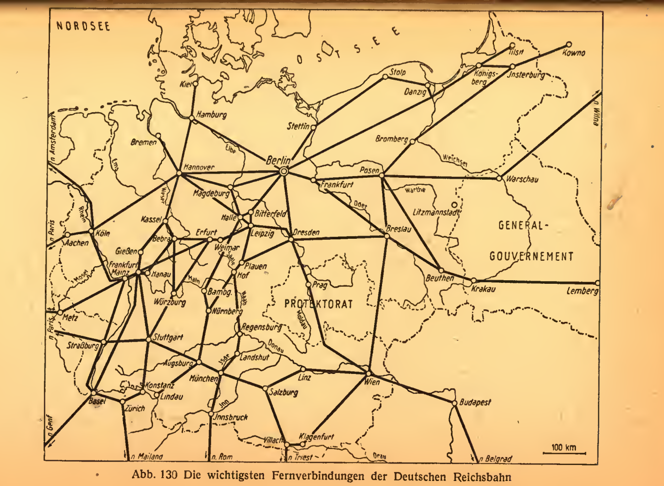


Abb. 130 Die wichtigsten Fernverbindungen der Deutschen Reichsbahn

sogar Umwege gewählt, um den Nachbarn nicht an den Vorteilen des Eisenbahnbaues teilnehmen zu lassen und den Verkehr möglichst lange im eigenen Lande zu behalten. Vielfach benutzten die Regierungen den Bahnbau auch dazu, die neuerworbenen Landesteile ohne Rücksicht auf alte Verkehrsbeziehungen fester an die Landeshauptstadt anzuschließen. Bismarck wollte die völkisch einigende Kraft der Eisenbahn zur Festigung des Reichsgedankens ausnutzen und schritt deshalb zunächst zur Verstaatlichung der preußischen Privatbahnen. Sein Plan einer Reichseisenbahn scheiterte jedoch am Widerstand der Landesregierungen und wurde erst nach dem Weltkriege verwirklicht.

Heute besitzt Deutschland ein Netz von 75000 km Eisenbahnen. Im Rheintal aufwärts führt die Strecke von Köln, von Amsterdam kommend, über Mainz am linken Rheinufer entlang nach Basel. Rechtsrheinisch ist die Linie von Frankfurt a. M. über Mannheim, Karlsruhe nach Basel gelegt (Abb. 130). Von Hamburg besteht eine Verbindung nach Basel, die durch die Norddeutsche Tiefebene führt und Hannover berührt. Sie benutzt dann die Täler der Leine und Weser, umgeht in einem Bogen den Vogelsberg und fädelt sich in Frankfurt a. M. in die Linie nach Basel ein. Die Strecke Berlin–München gabelt sich, nachdem bei Wittenberg die Elbe überschritten worden ist, in Bitterfeld an der Mulde in zwei Zweige. Der eine führt im Saaletal aufwärts, überquert die Höhenzüge des Thüringer Waldes und kreuzt bei Bamberg den Main. Über Nürnberg und Augsburg wird München erreicht. Die zweite Gabel geht von Bitterfeld aus über Leipzig, Plauen i. V. nach Hof. Das Fichtelgebirge wird überschritten, bei Regensburg die Donau überquert und von Landshut ab das Tal der Isar als Weg nach München benutzt. Von dort besteht Anschluß über Innsbruck und über den Brenner nach Rom. Die Strecke Berlin–Dresden–Prag–Wien führt durch die Täler der Elbe und Moldau und stellt die Verbindung mit Budapest und den Balkanländern her.

In der Richtung von West nach Ost bestehen folgende Hauptverbindungen:

(Paris–Lüttich) Köln–Hannover–Berlin { Königsberg / Frankfurt a. d. O.–Posen–Warschau

(Paris–Reims) Metz–Frankfurt a. M.–Bebra–Erfurt–Weimar–Leipzig–Berlin
(Paris) Straßburg–Stuttgart–Augsburg–München–Salzburg–Wien.

Weitere Streckenführungen sind aus der Karte mit den wichtigsten Fernverbindungen der Deutschen Reichsbahn (Abb. 130) ersichtlich.

Bis zur Jahrhundertwende hatte die Eisenbahn fast den gesamten Personen- und Güterverkehr auf größeren Strecken an sich gezogen. Die Straße und das Pferdefuhrwerk dienten fast ausschließlich dem Nahverkehr und als Zubringer zur Eisenbahn. Das änderte sich jedoch allmählich mit dem Auftreten des Kraftwagens. Mit ihm ist es möglich, Umwege, zu denen die Eisenbahn von der Natur gezwungen wurde, abzukürzen, Aufenthalte beim Umsteigen zu ersparen und abseits gelegene Orte zu erreichen.

Nachdem der Bau großräumiger und tragfähiger Omnibusse gelungen war, entstanden an Stelle neuer Eisenbahnstrecken Omnibuslinien, die vor allem in der Anlage billiger sind. Einen Teil des Güterverkehrs führen die Fernlastzüge durch. Die hohen Kosten des Autotransportes sind nur für



Abb. 131 Die Reichsautobahnen

die weniger umfangreichen, für hochwertige und leichtverderbliche Güter tragbar. Deshalb werden mit der Eisenbahn nach wie vor alle Massengüter sowie die meisten Stückgüter auf große Entfernungen befördert.

Die Verkehrszunahme, die das Auftreten des schnellen Kraftwagens zur Folge hatte, führte zu einer immer größeren Zahl von Verkehrsunfällen. Daher konnten auf den vorhandenen Straßen die Betriebsvorteile und

die Geschwindigkeit der Motorfahrzeuge nicht ausgenutzt werden. Um diese Schwierigkeiten zu beseitigen, ordnete der Führer den Bau besonderer Reichsautobahnen (Abb. 130) an und beauftragte mit ihrer Ausführung den Generalinspektor für das deutsche Straßenwesen Dr. Todt.

Das neue Reichsautobahnnetz ist das erste Straßennetz, das einheitlich für das ganze Reich in einer Gesamtlänge von 14000 km geplant wurde, von denen zur Zeit etwa 3500 km fertiggestellt sind. Reichsminister Dr.-Ing. Fritz Todt hat mit diesen Autobahnen etwas Einmaliges in der Geschichte der Menschheit geschaffen. Noch viel mehr als Straßen und Eisenbahn — abgesehen von den großen Bahnhöfen — beeinflußt die Reichsautobahn das Bild der deutschen Landschaft. Gleichzeitig erschließt sie zahlreiche, bisher unbeachtete Schönheiten. Im Gegensatz zu vielen Ingenieurbauwerken aus der Zeit des Materialismus bildet sie keine Fremdkörper in der Landschaft, sondern sie paßt sich in wohlgefälliger Linienführung harmonisch in diese ein. Auch die einzelnen Bauwerke, angefangen bei der einfachen Überführung bis zur großen weitgespannten Talbrücke, sind gleichsam Teile der Landschaft.

Aus dem Kartenbild schälen sich zwei Verbindungswege vom Norden zum Süden heraus, nämlich Hamburg–Hannover–Kassel–Würzburg–Stuttgart und Königsberg–Stettin–Berlin–Leipzig–Bayreuth–München. Vom Westen nach dem Osten führen auch zwei Hauptverbindungen: Aachen–Köln–Hannover–Magdeburg–Berlin–Frankfurt a. d. O.–Posen–Litzmannstadt und Saarbrücken–Frankfurt a. M.–Eisenach–Leipzig–Dresden–Breslau–Beuthen.

Älter als feste Landstraßen, Eisenbahnen und Autostraßen sind die Binnenwasserstraßen Deutschlands. Deutschlands natürliche Wasserstraßen Rhein, Weser, Elbe, Oder und Weichsel durchschneiden das Reich annähernd von Süden nach Norden. In der West-Ost-Richtung wird das Netz durch die größtenteils künstliche Rhein-Weichsel-Verbindung und durch die Donau vervollständigt. Innerhalb dieses Grundnetzes sind noch ergänzende Verästelungen und Querverbindungen, aber auch erhebliche Lücken, deren Schließung notwendig ist, vorhanden. Abb. 132 gibt einen Überblick über die deutschen Wasserstraßen, die im Augenblick mit wenigstens 400-t-Schiffen befahren werden können. Das heute bestehende Grundnetz ist fast durchweg für größere und wirtschaftlichere Schiffseinheiten von 600 bis 1000 t ausgebaut. Wenn im Laufe der Jahre die Lücken durch die im Ausbau begriffenen bzw. geplanten Wasserstraßen geschlossen sind, dann bestehen folgende leistungsfähige Hauptwasserstraßen nach dem für Deutschland wichtigen südosteuropäischen Wirtschaftsraum:

1) Duisburg–Rhein–Main–Donau
2) Bremen–Weser–Werra–Main–Donau
3) Hamburg–Elbe–Donau
4) Stettin–Oder–Donau

Eine weitere Notwendigkeit ist der Ausbau der Wasserstraßen in den wiedergewonnenen Ostgebieten. Da der frühere polnische Staat für Wasserbauarbeiten nur geringe Aufwendungen machte, ist kaum eine einigermaßen leistungsfähige Wasserstraße in diesen Gebieten vorhanden.

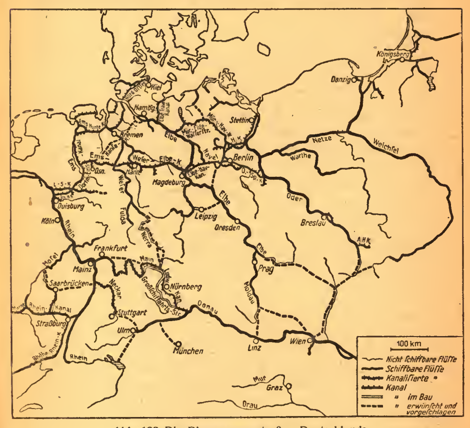


Abb. 132 Die Binnenwasserstraßen Deutschlands

Bei weitem die wichtigste Wasserstraße des Deutschen Reiches ist der Rhein. Ihm stehen durch die doppelte Schneeschmelze, im Frühjahr im Mittelgebirge und im Sommer im Hochgebirge, und die Herbstregen fast das ganze Jahr über genügend große Wassermengen zur Verfügung, so daß bis Mannheim 3000-t-Kähne, bis Straßburg und später bis Konstanz 1500-t-Kähne verkehren können. Es genügt darum, in dem Strom Regulierungsbauten vorzunehmen und die Fahrrinnen freizubaggern. Der Bodensee stellt ein wichtiges Flutausgleichsbecken im Rheinlaufe dar. Die

Zahl der Eistage ist im Rheingebiet gering, so daß die Schiffahrt auch während des größten Teils des Winters aufrechterhalten werden kann.

Da die Weser ein reiner Mittelgebirgsfluß ist, muß im trockenen Sommer ihre Mindestwassertiefe von 1,80 m durch eine planvolle Wasserwirtschaft gesichert werden. Ihr dient die noch vor dem Weltkriege gebaute Edertalsperre mit 202 Mill. m³ Inhalt. Auf der Elbe fällt die Schiffahrt wegen Wassermangels, Hochwassers oder Eistagen für einen großen Teil des Jahres aus, und erst recht gilt dies für die Oder. In dem Einzugsgebiet dieser Ströme sind daher eine große Zahl von Talsperren zur Aufnahme von Hochwasserwellen und Speisung der Flüsse bei Niedrigwasser gebaut oder geplant worden. Die größten sind die Bleiloch- und Saaletalsperre an der oberen Saale sowie die von Ottmachau an der Glatzer Neiße. Auch die Donau führt oberhalb der Innmündung bei Passau nicht immer genügend Wasser, da in ihrem Laufe in den Jurakalken Sickerstellen auftreten. Obwohl die Weichsel ihre Zuflüsse aus den niederschlagsreichen Karpaten empfängt, wird ihre Wasserführung durch das sommertrockene Klima stark beeinträchtigt. Auch bedarf der gesamte Fluß einschließlich der von den Polen verwahrlosten Mündungsstrecke erst eines weitgehenden Ausbaues, ehe er als leistungsfähige Wasserstraße angesprochen werden kann. Das gilt erst recht von seinen Nebenflüssen. Die zur Sicherung der Wasserhaltung der deutschen Mittelgebirgsflüsse angelegten Talsperren stellen gleichzeitig eine wertvolle Hochwassersicherung des Tieflandes und eine bedeutende Kraftquelle dar. Neuerdings benutzt man ihr Wasser auch zur Speisung von Berieselungs- und Beregnungsanlagen, um den Ertrag der Felder zu steigern.

Mit dem Dortmund-Ems-Kanal und dem Mittelland-Kanal ist eine Verbindung des rheinisch-westfälischen mit dem mitteldeutschen Industriegebiet, mit der Reichshauptstadt und der Oder hergestellt. Das oberschlesische Industriegebiet hat durch den Adolf-Hitler-Kanal, der bei Gleiwitz beginnt, Anschluß an das deutsche Binnenwasserstraßennetz gefunden. Um den Schiffen den Weg von der Nordsee zur Ostsee abzukürzen, wurde der Kaiser-Wilhelm-Kanal geschaffen. Waren, die aus Übersee kommen, können weitgehend auf dem Wasserweg in das Landesinnere transportiert werden. Unsere Umschlagehäfen (Bremen und Hamburg für die Länder jenseits des Ozeans und Stettin, Danzig und Königsberg für die nordischen Länder) haben alle günstigen Anschluß an das deutsche Wasserstraßennetz.

Die Tatsache, daß die Binnenschiffahrt etwa ein Viertel der von der Eisenbahn beförderten Menge verfrachtet, läßt klar ihre volkswirtschaftliche Bedeutung sowie ihre Notwendigkeit erkennen. Es ist ein Irrtum, daß Wasserstraßen den Verkehr anderer Verkehrsmittel beeinträchtigen und schädigen. Die verschiedenen Verkehrswege ergänzen sich vielmehr und fördern somit gemeinsam die Wirtschaft. Für den Transport von Massengütern (Getreide, Mühlenerzeugnisse, Erze, Kohle, Holz, Steine) auf längere Entfernungen ist kein Beförderungsmittel so geeignet wie das



Abb. 133 Das Luftverkehrsnetz Europas

Wasserfahrzeug. Die Unterhaltung von Kanälen und Schiffen sowie die Fortbewegung im stromlosen Wasser ist billiger als die Unterhaltung des Ober- und Unterbaues sowie der Transportmittel und als die Beschaffung der Betriebsstoffe beim Eisenbahn- wie Straßenverkehr. Im Kriege ist außerdem die Entlastung des Eisenbahn- und Fernlastverkehrs durch die Wasserstraßen von großer Bedeutung.

Die Gesamtlänge unserer Wasserstraßen beträgt 12000 km. Der größte Binnenhafen ist Duisburg-Ruhrort mit einem Umschlag von 23 Millionen Tonnen. Ihm folgen Mannheim-Ludwigshafen, Hamburg, Berlin, Emden und Stettin. Hinter diesen deutschen Flußhäfen bleiben alle anderen, vor allem die Donauhäfen, an Bedeutung weit zurück.

Das jüngste Verkehrsmittel ist das Flugzeug. Durch seine große Schnelligkeit und Reichweite ist es allen übrigen Verkehrsmitteln weit überlegen. Schwierigkeiten erwachsen ihm durch das häufig wechselnde Wetter unserer Breiten und beim Überfliegen der inselfreien Weltmeere. Wegen der hohen Kosten, des teuren Materials, des starken Brennstoffverbrauchs und der Menge geschulten Personals, das notwendig ist, sind nur Personen- und Postverkehr und die Verfrachtung hochwertiger und schnell zu befördernder Güter wirtschaftlich. Berlin ist unser größter Flughafen. Ihm folgen Frankfurt a. M., Köln, Halle-Leipzig und Hamburg.

Die Entwicklung des deutschen Flugverkehrs war möglich, obwohl das Versailler Diktat anfangs dem deutschen Flugwesen überall Fesseln angelegt hatte. Dank des Unternehmungsgeistes der deutschen Flieger und der Luftverkehrsgesellschaften und der Leistungen der deutschen Flugzeugindustrie konnten Flugverbindungen nach allen europäischen Hauptstädten und sogar nach den amerikanischen Kontinenten aufgenommen werden (Abb. 133).

Die verschiedenen Verkehrsmittel und Verkehrsnetze in Deutschland stehen nicht miteinander im Wettbewerb, sondern ergänzen sich gegenseitig. Sie sind alle für die Befriedigung besonderer Verkehrsbedürfnisse geschaffen und stellen sich immer besser auf ihre Sonderaufgaben ein. Sie bringen den Verkehr einander zu und schließen das deutsche Land für den Verkehr bis in den letzten Winkel auf.

Ein abschließender Blick auf unsere Karten zeigt uns aber, daß es keine Schnellzugsstrecke, keine Autobahn oder Fluglinie von europäischer Bedeutung gibt, die nicht über deutsches Staatsgebiet führt. Deutschland ist auch hinsichtlich des gesamteuropäischen Verkehrs das Land der Mitte und vor anderen berufen, die Völker einander näher zu bringen.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Arithmetik und Algebra

1) Folgende Verhältnisse sind in Verhältnisse ganzer Zahlen umzuwandeln.

a) $1:0{,}02$ $\quad 3:0{,}5$ $\quad 2{,}5:0{,}3$ $\quad 1{,}08:0{,}04$

b) $a:\frac{b}{c}$ $\quad \frac{1}{m}:\frac{1}{k}$ $\quad \frac{3a}{5b}:\frac{2c}{3d}$ $\quad \frac{4}{5}:0{,}6$

Lösung:

a) $1:0{,}02 = 100:2 = 50:1$ $\quad 3:0{,}5 = 30:5 = 6:1$ $\quad 2{,}5:0{,}3 = 25:3$ $\quad 1{,}08:0{,}04 = 108:4 = 27:1$

b) Wir erweitern mit dem Hauptnenner

$a:\frac{b}{c} = ac:b$ $\quad \frac{1}{m}:\frac{1}{k} = k:m$ $\quad \frac{3a}{5b}:\frac{2c}{3d} = 9ad:10bc$ $\quad \frac{4}{5}:0{,}6 = 4:3$

2) Zu folgenden Proportionen sind die Produktengleichungen zu bilden.

a) $k:l = m:n$ $\quad b:a = c:d$ $\quad 3:7 = 18:42$

b) $a^2:ab = \frac{1}{a}:\frac{b}{a^2}$ $\quad (a^2 + 2ab + b^2):(a^2 - b^2) = (a+b):(a-b)$

Lösung:

a) $kn = lm$ $\quad bd = ac$ $\quad 3 \cdot 42 = 7 \cdot 18$

b) $b = b$ $\quad (a+b)(a+b)(a-b) = (a+b)(a-b)(a+b)$

3) Berechne die 4. Proportionale x!

a) $u:v = w:x$ $\quad x:4 = 2:1$

b) $5a:b = x:1$ $\quad 7a:x = 1:2$

Lösung: a) $x = \frac{v \cdot w}{u}$ $\quad x = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8$

b) $x = \frac{5a}{b}$ $\quad x = \frac{14a}{1} = 14a$

4) Welche 7 anderen Proportionen lassen sich aus $3:4 = 9:12$ bilden?

Lösung:

$4:3 = 12:9$

$3:9 = 4:12$ $\quad 4:12 = 3:9$

$12:4 = 9:3$ $\quad 9:3 = 12:4$

$12:9 = 4:3$ $\quad 9:12 = 3:4$

5) Folgende Potenzen sind auszurechnen.

a) 2^5 $\quad 5^2$ $\quad 3^6$ $\quad 6^3$ $\quad 4^3$ $\quad 3^4$ $\quad 5^1$ $\quad 1^5$

b) $(-1)^7$ $\quad (-2)^4$ $\quad (-4)^3$ $\quad (-c)^5$

Lösung: a) 32 $\quad$ 25 $\quad$ 729 $\quad$ 216 $\quad$ 64 $\quad$ 81 $\quad$ 5 $\quad$ 1

b) -1 $\quad +16$ $\quad -64$ $\quad -c^5$

6) Berechne folgende Quotienten!

a) $\frac{5u^3v}{4w^4} \cdot \frac{6v^2w}{25u^6}$ b) $\frac{14r^{12}s^9}{15t^2} \cdot \frac{45t^5}{28r^9s^6}$

Lösung: a) $\frac{3v^3}{10u^3w^3}$ b) $\frac{3r^3s^3t^3}{2}$

7) Folgende Wurzeln sind zu ziehen und die entsprechenden Potenzaufgaben daneben zu schreiben:

a) $\sqrt[4]{81}$; b) $\sqrt[5]{243}$; c) $\sqrt[6]{1000000}$; d) $\sqrt[10]{1024}$; e) $\sqrt[3]{0{,}027}$;

f) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; g) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; h) $\sqrt[3]{\frac{7}{1000}}$; i) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; k) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

Lösung:

a) $\sqrt[4]{81} = 3$, denn $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{81}}$

b) $\sqrt[5]{243} = 3$, denn $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{243}}$

c) $\sqrt[6]{1000000} = 10$, denn $10^6 = \underline{\underline{1000000}}$

d) $\sqrt[10]{1024} = 2$, denn $2^{10} = \underline{\underline{1024}}$

e) $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$, denn $0{,}3^3 = \underline{\underline{0{,}027}}$

f) $\sqrt[4]{0{,}0016} = 0{,}2$, denn $0{,}2^4 = \underline{\underline{0{,}0016}}$

g) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$, denn $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{25}}}$

h) $\sqrt[3]{\frac{7}{1000}} = \frac{1{,}91}{10}$, denn $\left(\frac{1{,}91}{10}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{7}{1000}}}$

i) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$, denn $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underline{\underline{\frac{16}{81}}}$

k) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$, denn $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = \underline{\underline{3\frac{3}{8}}}$

8) Welche der nachstehenden Wurzeln sind rational, welche irrational?

a) $\sqrt{16}$; b) $\sqrt[4]{16}$; c) $\sqrt[6]{0}$; d) $\sqrt[3]{0{,}009}$; e) $\sqrt[10]{1}$

Lösung:

a) $\sqrt{16} = 4$, rational; b) $\sqrt[4]{16} = 2$, rational; c) $\sqrt[6]{0} = 0$, rational

d) $\sqrt[3]{0{,}009} = \sqrt[3]{\frac{9}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{10^3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{10} = \frac{(3)^{\frac{2}{3}}}{10}$, irrational

e) $\sqrt[10]{1} = \pm 1$, denn $(+1)^{10} = 1$ und $(-1)^{10} = 1$, rational

9) Folgende Bruchpotenzen sind als Wurzeln zu schreiben:

a) $a^{\frac{1}{2}}$; b) $b^{\frac{1}{10}}$; c) $v^{\frac{8}{3}}$; d) $d^{1\frac{1}{7}}$

Lösung:

a) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; b) $b^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{b}$; c) $v^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{v^8}$; d) $d^{1\frac{1}{7}} = d^{\frac{8}{7}} = \sqrt[7]{d^8}$

10) Folgende Wurzeln sind zu vereinigen:

$$5\sqrt[7]{8} + 2\sqrt[6]{11} - 9\sqrt[7]{8} + 9\sqrt[6]{11} + 4\sqrt[7]{8}$$
$$= 2\sqrt[6]{11} + 9\sqrt[6]{11} + 5\sqrt[7]{8} - 9\sqrt[7]{8} + 4\sqrt[7]{8}$$
$$= (2 + 9)\sqrt[6]{11} + (5 - 9 + 4)\sqrt[7]{8} = 11\sqrt[6]{11} + 0 = 11\sqrt[6]{11}$$

11) Folgende Ausdrücke sind zu berechnen:

a) $(\sqrt{3a} + \sqrt{a})(\sqrt{3a} - \sqrt{a})$; b) $(3\sqrt{11} + 7\sqrt{2})(3\sqrt{11} - 7\sqrt{2})$

Lösung: Jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert ergibt:

a) $(\sqrt{3a} + \sqrt{a})(\sqrt{3a} - \sqrt{a}) = \sqrt{3a} \cdot \sqrt{3a} + \sqrt{a} \cdot \sqrt{3a}$
$- \sqrt{3a} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{3a})^2 - (\sqrt{a})^2 = 3a - a = 2a$

b) $(3\sqrt{11} + 7\sqrt{2})(3\sqrt{11} - 7\sqrt{2})$
$= 9(\sqrt{11})^2 + 21\sqrt{2 \cdot 11} - 21\sqrt{2 \cdot 11} - 49(\sqrt{2})^2$
$= 9 \cdot 11 - 49 \cdot 2 = 99 - 98 = 1$

Die Lösung beider Aufgaben wurde schrittweise ausgeführt. Bei Vergleich der Aufgaben mit dem Fall $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$ erkennen wir die Anwendbarkeit dieser Formel und können die Lösung schneller erhalten:

zu a) $(\sqrt{3a} + \sqrt{a})(\sqrt{3a} - \sqrt{a}) = (\sqrt{3a})^2 - (\sqrt{a})^2 = 3a - a = 2a$

zu b) $(3\sqrt{11} + 7\sqrt{2})(3\sqrt{11} - 7\sqrt{2})$
$= (3\sqrt{11})^2 - (7\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 11 - 49 \cdot 2 = 99 - 98 = 1$

12) Folgende Aufgaben sind zu lösen:

a) $\sqrt{b} \cdot \sqrt[6]{b}$; b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}$; c) $\sqrt[6]{c} \cdot \sqrt[9]{c}$

Da es sich um Wurzeln verschiedenen Grades handelt, ist Umformung der Wurzeln auf kleinsten gleichnamigen Wurzelexponenten nötig; erst dann darf weitere Multiplikation der Wurzeln durch Multiplizieren der neuen Radikanden unter dem gemeinsamen gleichnamigen Wurzelzeichen erfolgen.

a) $\sqrt{b} \cdot \sqrt[6]{b} =$? Kleinster gemeinschaftlicher Wurzelexponent aus 2 und 6 ist 6.

$$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b^1} = \sqrt[2\cdot 3]{b^{1\cdot 3}} = \sqrt[6]{b^3}; \quad \sqrt{b} \cdot \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^3} \cdot \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^3 \cdot b} = b^{\frac{4}{6}} = b^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{b^2}}}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir bei Rechnung mit Bruchpotenzen:

$$\sqrt{b} \cdot \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)} = b^{\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\right)} = b^{\frac{4}{6}} = b^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{b^2}}}$$

b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a} =$? Kleinster gemeinsamer Wurzelexponent aus 4 und 2 ist 4.

Daher: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = \sqrt[2\cdot 2]{a^2} = \sqrt[4]{a^2}$;

$$\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[4]{a^5} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a} = \underline{\underline{a\sqrt[4]{a}}}$$

oder in Bruchpotenz:

$$a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)} = a^{\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)} = a^{\frac{5}{4}} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{a\sqrt[4]{a}}}$$

c) $\sqrt[6]{c} \cdot \sqrt[9]{c} =$? Kleinster gemeinsamer Wurzelexponent aus 6 und 9 ist $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. Daher: $\sqrt[6]{c} \cdot \sqrt[9]{c} = \sqrt[6\cdot 3]{c^3} \cdot \sqrt[9\cdot 2]{c^2} = \sqrt[18]{c^3} \cdot \sqrt[18]{c^2} = \sqrt[18]{c^3 \cdot c^2} = \underline{\underline{\sqrt[18]{c^5}}}$

oder in Bruchpotenz: $\sqrt[6]{c} \cdot \sqrt[9]{c} = c^{\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{1}{9}} = c^{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)} = c^{\left(\frac{3}{18}+\frac{2}{18}\right)} = c^{\frac{5}{18}} = \underline{\underline{\sqrt[18]{c^5}}}$

13) Folgende Produkte sind durch Zerlegen in radizierbare Faktoren zu radizieren:

a) $\sqrt{8 \cdot 2}$; b) $\sqrt{75 \cdot 3}$; c) $\sqrt{32 \cdot 18}$; d) $\sqrt{162 \cdot 200}$

Lösung:

a) $\sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{4 \cdot 4} = \sqrt{4^2} = \underline{\underline{4}}$

b) $\sqrt{75 \cdot 3} = \sqrt{3 \cdot 5^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = (3^2 \cdot 5^2)^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 5 = \underline{\underline{15}}$

c) $\sqrt{32 \cdot 18} = \sqrt{2^5 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = (2^6 \cdot 3^2)^{\frac{1}{2}} = 2^3 \cdot 3 = \underline{\underline{24}}$

d) $\sqrt{162 \cdot 200} = \sqrt{2 \cdot 9^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2} = \sqrt{2^4 \cdot 9^2 \cdot 5^2} = (2^4 \cdot 9^2 \cdot 5^2)^{\frac{1}{2}}$
$= 2^2 \cdot 9 \cdot 5 = \underline{\underline{180}}$

14) Der Faktor vor der Wurzel ist unter die Wurzel zu bringen:

a) $z\sqrt[4]{\frac{y}{z}}$; b) $m\sqrt[3]{\frac{1}{m^2}}$; c) $25\sqrt{0{,}08}$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}$

Lösung:

a) $z\sqrt[4]{\frac{y}{z}} = \sqrt[4]{z^4 \cdot \frac{y}{z}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{y \cdot z^3}}}$; b) $m\sqrt[3]{\frac{1}{m^2}} = \sqrt[3]{\frac{m^3}{m^2}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{m}}}$

c) $25\sqrt{0{,}08} = \sqrt{25^2 \cdot 0{,}08} = \sqrt{625 \cdot 0{,}08} = \underline{\underline{\sqrt{50}}}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{27}{8}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^3}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3}{2}}}}$

15) $4{,}69 \cdot 6{,}61 = ?$ 16) $1{,}77 \cdot 0{,}565 = ?$ 17) $0{,}289 \cdot 0{,}346 = ?$

18) $0{,}00353 \cdot 1170 = ?$ 19) $0{,}641 \cdot 0{,}0677 \cdot 22{,}4 \cdot 853 = ?$

20) $\frac{10{,}6 \cdot 7{,}93}{9{,}82} = ?$ 21) $\frac{0{,}826}{2{,}87 \cdot 23{,}4} = ?$ 22) $0{,}293^5 = ?$

23) $\sqrt{0{,}0543} = ?$ 24) $0{,}129\sqrt{22} = ?$ 25) $\frac{\sqrt{2{,}01^3}}{0{,}885 \cdot \sqrt[3]{0{,}0334}} = ?$

26) $34{,}56 \cdot 4{,}576 = ?$ 27) $\left(\frac{0{,}2468}{3{,}754}\right)^3 = ?$

Lösung:

15)
$$\begin{array}{ll} \lg 4{,}69 & = 0{,}6712 \\ \lg 6{,}61 & = 0{,}8202 \\ \hline \lg x & = 1{,}4914 \\ x & = \mathbf{31{,}0} \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{ll} \lg 1{,}77 & = 0{,}2480 \\ \lg 0{,}565 & = 0{,}7520 - 1 \\ \hline \lg x & = 0{,}0000 \\ x & = \mathbf{1{,}00} \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}289 & = 0{,}4609 - 1 \\ \lg 0{,}346 & = 0{,}5391 - 1 \\ \hline \lg x & = 0{,}0000 - 1 \\ x & = \mathbf{0{,}100} \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}00353 & = 0{,}5478 - 3 \\ \lg 1170 & = 3{,}0682 \\ \hline \lg x & = 0{,}6160 \\ x & = \mathbf{4{,}13} \end{array}$$

19)
$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}641 & = 0{,}8069 - 1 \\ \lg 0{,}0677 & = 0{,}8306 - 2 \\ \lg 22{,}4 & = 1{,}3502 \\ \lg 853 & = 2{,}9309 \\ \hline \lg x & = 2{,}9186 \\ x & = \mathbf{829} \end{array}$$

20)
$$\begin{array}{ll} \lg 10{,}6 & = 1{,}0253 \\ \lg 7{,}93 & = 0{,}8993 \\ \hline \lg Z & = 1{,}9246 \\ \lg 9{,}82 & = 0{,}9921 \\ \hline \lg x & = 0{,}9325 \\ x & = \mathbf{8{,}56} \end{array}$$

21)
$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}826 & = 0{,}9170 - 1 \\ \lg 2{,}87 & = 0{,}4579 \\ \hline \lg \frac{0{,}826}{2{,}87} & = 0{,}4591 - 1 \\ \lg 23{,}4 & = 1{,}3692 \\ \hline \lg x & = 0{,}0899 - 2 \\ x & = \mathbf{0{,}0123} \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{ll} \lg 0{,}293 & = 0{,}4669 - 1 \\ \lg x & = 0{,}3345 - 3 \\ x & = \mathbf{0{,}00216} \end{array}$$

23) $\lg 0{,}0543 = 0{,}7348 - 2$
$\lg x = 0{,}3674 - 1$
$x = \mathbf{0{,}233}$

24) $\lg 22 = 1{,}3424$
$\frac{1}{2} \lg 22 = 0{,}6712$
$\lg 0{,}129 = 0{,}1106 - 1$
$\lg x = 0{,}7818 - 1$
$x = \mathbf{0{,}605}$

25) $\lg 2{,}01 = 0{,}3032$
$\frac{1}{2} \lg 2{,}01 = 0{,}1516$
$\lg Z = 0{,}4548$
$\lg N = 0{,}4548 - 1$
$\lg x = 1{,}0000$
$x = \mathbf{10}$

$\lg 0{,}0334 = 0{,}5237 - 2$
$\lg 0{,}0334 = 1{,}5237 - 3$
$\frac{1}{3} \lg 0{,}0334 = 0{,}5079 - 1$
$\lg 0{,}885 = 0{,}9469 - 1$
$\lg N = 0{,}4548 - 1$

26) $\lg 34{,}56 = 1{,}5386$
$\lg 4{,}576 = 0{,}6605$
$\lg x = 2{,}1991$
$x = \mathbf{158{,}1}$

27) $\lg 0{,}2468 = 0{,}3923 - 1$
$\lg 3{,}754 = 0{,}5745$
$\lg \frac{0{,}2468}{3{,}754} = 0{,}8178 - 2$
$\lg x = 0{,}4534 - 4$
$x = \mathbf{0{,}000284}$

Geometrie

28) Die Flächen des in Abb. 27 dargestellten Daches sind in Kupferblech eingedeckt worden. Zur Abrechnung der Arbeiten müssen die Dachflächen berechnet werden.

Rechnungsgang: Die Dachflächen *I* und *II* stellen Trapeze, *III* und *IV* Dreiecke und *V* und *VI* Parallelogramme dar. Da, wie aus der Abbildung ersichtlich ist, sämtliche Grate und die Kehle in der Draufsicht unter 45° verlaufen, haben alle Dachflächen die gleiche Neigung. Aus der Abbildung sind ferner alle Abmessungen der Dachflächen zu entnehmen. Ihre Flächeninhalte können deshalb unter Verwendung der entsprechenden Formeln berechnet werden.

Lösung:

Fläche *I*: $F_I = \frac{(4{,}05 + 4{,}20 + 4{,}05) + 4{,}20}{2} \cdot 5{,}76 = 47{,}5\ \text{m}^2$

Fläche *II*: $F_{II} = \frac{(8{,}10 + 2{,}80) + 2{,}80}{2} \cdot 5{,}76 = 39{,}5\ \text{m}^2$

Fläche *III* + *IV*: $F_{III} + F_{IV} = 2 \cdot \frac{8{,}10 \cdot 5{,}76}{2} = 46{,}7\ \text{m}^2$

Fläche *V*: $F_V = 2{,}80 \cdot 5{,}76 = 16{,}1\ \text{m}^2$

Fläche *VI*: $F_{VI} = 4{,}20 \cdot 5{,}76 = 24{,}2\ \text{m}^2$

Gesamtinhalt der Dachflächen: 174,0 m²

Der Gesamtinhalt der Dachflächen beträgt **174 m²**.

29) Die Höhe eines unbesteigbaren Schornsteines soll festgestellt werden. Ein Theodolit wird deshalb im Abstand von 100 m vom Schornstein aufgestellt und der höchste Punkt des Schornsteines anvisiert. Die Instrumentenhöhe beträgt 1,30 m. Die Ablesung auf einer im Abstand von 10 m vor dem Instrument in die Visierlinie eingeschobenen Meßlatte ergibt sich zu 3,67 m (Abb. 28). Wie hoch ist der Schornstein?

Rechnungsgang: Wir denken uns durch die Visierachse eine waagerechte Gerade gezogen und finden, daß der obere Punkt der Meßlatte 3,67 — 1,30 = 2,37 m über der Visierachse liegt. Die Höhe des Schornsteins über der Visierachse sei x. Wir stellen nun die Proportion auf und lösen sie nach x auf. Zählen wir die Höhe des Instrumentes hinzu, so erhalten wir die Höhe des Schornsteines.

Lösung:

$$\frac{2{,}37}{10} = \frac{x}{100}$$

$$100 \cdot 2{,}37 = 10\,x$$

$$10\,x = 237$$

$$x = 23{,}70$$

$$\text{Schornsteinhöhe } H = 23{,}70 + 1{,}30$$

$$H = 25{,}00 \text{ m}$$

Der Schornstein hat eine Höhe von **25,00 m.**

30) In die Dichtungsnut des elliptischen Verschlußdeckels eines Kessels ist ein Vierkantgummi einzusetzen; für das Stauchen des Gummis beim Einlegen ist ein Zuschlag auf die ermittelte Dichtungslänge von 5% zu machen. Wie lang muß der Gummi geschnitten werden, wenn der Verschlußdeckel die Abmessungen $D = 50$ cm und $d = 40$ cm hat? Welche Kraft haben die Verschlußschrauben aufzunehmen, wenn der Kessel mit 5 kg/cm² Überdruck gegenüber dem Luftdruck geprüft werden soll (Abb. 40)?

Lösung: Der Umfang der Ellipse wird errechnet nach der Gleichung:

$$U = \frac{D + d}{2} \cdot \pi = \frac{50 + 40}{2} \cdot \pi = \frac{90}{2} \cdot \pi = 141 \text{ cm}$$

Mit einem Zuschlag von 5% erhält man die gesuchte Länge:

$$L = 141 \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 141 \cdot 1{,}05 = 148 \text{ cm}$$

Also muß der Gummi **148 cm** lang sein.

Die Größe der Fläche wird errechnet nach der Gleichung:

$$F = \frac{D \cdot d}{4} \cdot \pi = \frac{50 \cdot 40}{4} \cdot \pi = 1570 \text{ cm}^2$$

Da der Überdruck 5 atü ist, beträgt die Kraft auf den Deckel:

$$P = 1570 \cdot 5 = 7850 \text{ kg}$$

Die Schrauben haben eine Kraft von **7850 kg** aufzunehmen.

Naturlehre

31) Ein Glasgefäß trägt die Aufschrift: 100 cm^3 bei 20°. Wie groß ist das Fassungsvermögen, wenn das Glas auf 80° erwärmt wird? Für Glas ist $\alpha = 0{,}0000081$ und $\gamma = 3\,\alpha$.

Lösung: Die Temperaturerhöhung von 20° auf 80° beträgt $t = 60°$; $V_1 = 100 \text{ cm}^3$; $\gamma = 3\,\alpha = 3 \cdot 0{,}0000081 = 0{,}0000243$. Es ist:

$$V_2 = V_1 (1 + \gamma \cdot t)$$
$$= 100\,(1 + 0{,}0000243 \cdot 60)$$
$$V_2 = 100{,}1458 = 100{,}15 \text{ cm}^3$$

Das Fassungsvermögen beträgt bei 80° **100,15 cm³.**

32) In einem Winderhitzer werden stündlich 120 m^3 Luft von 0° auf 800° erhitzt. Wieviel m^3 erhitzte Luft liefert die Anlage?

Lösung: Es ist $V_0 = 120$; $T_0 = 273 + 0 = 273°$; $T_1 = 273 + 800 = 1073°$; $V_2 = ?$

Aus der Gleichung $\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1}$ ergibt sich:

$$V_1 = \frac{V_0 \cdot T_1}{T_0} = \frac{120 \cdot 1073}{273}$$
$$V_1 = 471{,}6 \text{ m}^3$$

Die Anlage liefert stündlich **471,6 m³** erhitzte Luft von 800°.

33) 6 kg Alkohol werden von 15° auf 65° erwärmt. Welche Wärmemenge ist erforderlich, wenn die spezifische Wärme $c = 0{,}58$ ist?

Lösung: $G = 6 \text{ kg}$; $t = 65° - 15° = 50°$; $c = 0{,}58$

$$Q = G \cdot c \cdot t$$
$$Q = 6 \cdot 0{,}58 \cdot 50 = 174 \text{ kcal}$$

Die Wärmeaufnahme beträgt **174 kcal.**

Bücher für die Weiterbildung

Arbeitsgemeinschaften und Kameraden, die ihre in den Soldatenbriefen erworbenen Kenntnisse vertiefen und erweitern wollen, werden außer den im 1. und 2. Teil genannten Werken folgende Lehrbücher empfohlen (Anfragen wegen Lieferung dieser Bücher sind an eine Frontbuchhandlung oder an eine Buchhandlung des Heimatortes zu richten):

Mein Kampf von Adolf Hitler. Verlag Eher, München 1940. 519.—523. Auflage. 782 Seiten. RM. 7,20.

Deutsche Sprachschule von Ernst Pfaff, Kurt Haß und Hans Kasdorff. Verlag Diesterweg, Frankfurt a. M. 1941. 320 Seiten. RM. 3,60.

Technisch-Mathematische Aufgabensammlung von Dr. W. Mischke. Verlag Elsner, Berlin 1941. 50 Seiten. RM. 1,90.

Die Grundlagen der Projektionslehre von J. Randoll. Verlag Jänecke, 1940. 64 Seiten mit 44 Abbildungen. RM. 1,80.

Als Nachschlagewerk:

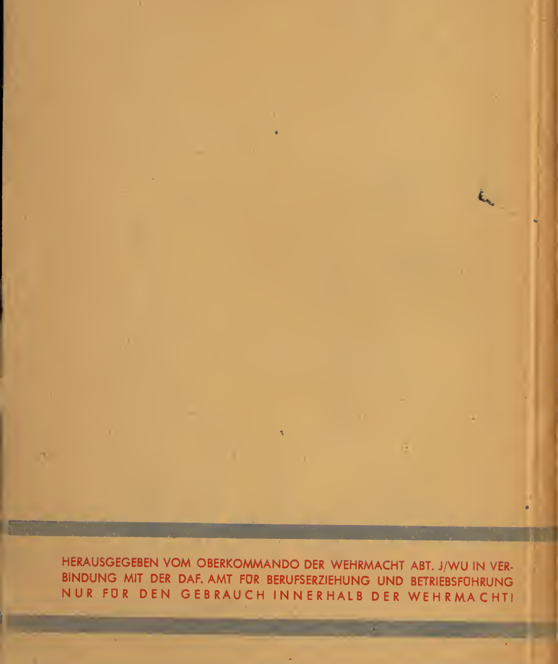
Taschenbuch für den Maschinenbau in zwei Bänden. Herausgegeben von Professor H. Dubbel. Verlag Springer, Berlin 1941. 8. Auflage. 1540 Seiten mit etwa 300 Abbildungen Beide Bände zusammen RM. 19,50.

Stichwortverzeichnis

Die römischen Ziffern geben den betreffenden Teil an, die arabischen Zahlen die Seitenzahlen

Druck: Bibliographisches Institut AG. in Leipzig





HERAUSGEGEBEN VOM OBERKOMMANDO DER WEHRMACHT ABT. J/WU IN VERBINDUNG MIT DER DAF. AMT FÜR BERUFSERZIEHUNG UND BETRIEBSFÜHRUNG